TU Bergakademie Freiberg
Institut für Diskrete Mathematik und Algebra
Prof. Dr. Martin Sonntag
Dr. Uwe Weber

Freiberg, den 6. November 2022

Lineare Algebra I BWM/BM/Mm
$2\frac{1}{2}$. Hausaufgabe
Musterlösungen

1. *Zusatzaufgabe:* Etwa so:

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \exists n (n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n > 0$$
$$\wedge \ \exists a_0, \ldots, a_n (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \ \wedge \ a_n \neq 0 \ \wedge \ a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0))\},$$

es handelt sich also um die Menge aller reellen Zahlen, die sich als Nullstellen eines Polynoms mit rationalen (äquivalent auch: ganzzahligen) Koeffizienten darstellen lassen.

2. a)

$$A \setminus (B \cup C) = \{x | x \in A \wedge x \notin (B \cup C)\} = \{x | x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C\}$$
$$= \{x | (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \wedge \ (x \in A \ \wedge \ x \notin C)\}$$
$$= \{x | x \in A \setminus B \ \wedge \ x \in A \setminus C\} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

3. a)

$$(A \cup B) \setminus (A \triangle B) = (A \cup B) \cap \overline{\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)}$$
$$= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap \overline{B} \cup B \cap \overline{A})} \qquad \text{Elim. von } \setminus$$
$$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \qquad \text{Morgan}$$
$$= \Big(\underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup B\Big) \cap (\overline{B} \cup A) \qquad \text{Distr., Komplementregeln}$$
$$= B \cap (\overline{B} \cup A) = \underbrace{B \cap \overline{B}}_{=\emptyset} \cup B \cap A = A \cap B \qquad \text{Distr., Komplementregeln}$$

4.

$$(B \setminus C) \cup \Big(\underbrace{(\overline{A} \cap B \cap C) \cup C}_{=C \text{ (Absorption)}}\Big) \cap \Big(\underbrace{(A \cap C) \cup (\overline{A} \cap C)}_{=(A \cup \overline{A}) \cap C \text{ (Distr.)}}\Big).$$
$$= B \cap \overline{C} \cup C \cap \Big(\underbrace{(A \cup \overline{A})}_{=E \text{ (Allmenge)}} \cap C\Big) = B \cap \overline{C} \cup C \cap C = B \cap \overline{C} \ \cup \ C$$
$$\underset{\text{Distr.}}{=} (B \cup C) \cap \underbrace{(\overline{C} \cup C)}_{=E} = B \cup C.$$

5. „$\Longrightarrow$“: Es sei $A \subseteq B$. Zu zeigen ist $A \cap B = A$, d. h. es müssen die beiden Inklusionen $A \cap B \subseteq A$ und $A \subseteq A \cap B$ gezeigt werden.

   Die Inklusion $A \cap B \subseteq A$ ist offensichtlich (da $(x \in A \ \wedge \ x \in B) \rightarrow x \in A$). Es verbleibt noch die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Sei $x \in A$. Nach Voraussetzung ist dann auch $x \in B$ und somit $x \in A \cap B$, also gilt $A \subseteq A \cap B$.

   „$\Longleftarrow$“: Es sei $A \cap B = A$, wir müssen zeigen, dass $A \subseteq B$. Sei $x \in A$. Nach Voraussetzung ist dann $x \in A \cap B$ und somit auch $x \in B$. Also gilt $A \subseteq B$.