TU Bergakademie Freiberg
Vorl. Frau Prof. Dr. Swanhild Bernstein

Freiberg, den 2. November 2022

(Höhere) Mathematik für Ingenieure 1
Vorbereitungs-/Hausaufgaben Komplexe Zahlen

1. Es sei $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_2 = 4 - 3\mathrm{i}$. Berechnen Sie $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ z_1 \cdot \overline{z_2},$ $z_1/z_2,\ \overline{z_1} + z_2,\ z_1 - \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2},\ \overline{z_1}/z_2,\ z_1 + \overline{z_2},\ z_1^2,\ |z_1|,\ |z_2|$ und $|z_1 - z_2|$.

   Lösung:

   $z_1 + z_2 = 5 - 2\mathrm{i},\ z_1 - z_2 = -3 + 4\mathrm{i},\ z_1 \cdot z_2 = 7 + \mathrm{i},\ z_1 \cdot \overline{z_2} = 1 + 7\mathrm{i},\ z_1/z_2 = \frac{1}{25} + \frac{7}{25}\mathrm{i},$ $\overline{z_1} + z_2 = 5 - 4\mathrm{i},\ z_1 - \overline{z_2} = -3 - 2\mathrm{i},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = 7 - \mathrm{i},\ \overline{z_1}/z_2 = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}\mathrm{i},\ z_1 + \overline{z_2} = 5 + 4\mathrm{i},$ $z_1^2 = 2\mathrm{i},\ |z_1| = \sqrt{2},\ |z_2| = 5,\ |z_1 - z_2| = 5.$

2. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von

   a) $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + 1$

   Lösung:

   $$\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \frac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + 1 = \frac{(1+\mathrm{i})^2 + 4\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} + 1 = \frac{1 + 2\mathrm{i} - 1 + 4\mathrm{i} + 4}{2} + 1 = 3 + 3\mathrm{i}$$

   $\Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = 3,\ \mathrm{Im}(z) = 3.$

   b) $z = -\dfrac{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) + 3\mathrm{i} - 6}{(2-\mathrm{i})^2 - 2 + \mathrm{i}}$

   Lösung:

   $$-\frac{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) + 3\mathrm{i} - 6}{(2-\mathrm{i})^2 - 2 + \mathrm{i}} = 2 = -\frac{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) - 3(2-\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})^2 - (2-\mathrm{i})}$$
   $$= -\frac{(2-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}-3)}{(2-\mathrm{i})(2-\mathrm{i}-1)} = -\frac{2\mathrm{i}-2}{1-\mathrm{i}} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})} = 2$$

   $\Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = 2,\ \mathrm{Im}(z) = 0.$

   Variante (Ausmultiplizieren, stets gleich $\mathrm{i}^2 = -1$ ersetzt):

   $$z = -\frac{2 - \mathrm{i} + 4\mathrm{i} + 2 + 3\mathrm{i} - 6}{4 - 4\mathrm{i} - 1 - 2 + \mathrm{i}} = -\frac{-2 + 6\mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}} = 2$$

   c) $z = -\dfrac{1}{2 - \frac{2}{\mathrm{i}+1}}$

   Lösung:

   $$-\frac{1}{2 - \frac{2}{\mathrm{i}+1}} = -\frac{1}{\frac{2(\mathrm{i}+1)-2}{\mathrm{i}+1}} = -\frac{\mathrm{i}+1}{2\mathrm{i}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{i}} = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$$

   $\Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}.$

3. Für welche *reellen* c ist $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}}$ selbst *reell*, für welche *rein imaginär*? Welche Zahl stellt z dann jeweils dar?

Lösung:

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}} \cdot \frac{c+\mathrm{i}}{c+\mathrm{i}} = \frac{(c-1)+(c+1)\,\mathrm{i}}{c^2+1} = \frac{c-1}{c^2+1} + \frac{c+1}{c^2+1}\,\mathrm{i}$$

z reell $\iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff c = -1$, dann ist $z = -1$.

z rein imaginär $\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff c = 1$, dann ist $z = \mathrm{i}$.

4. Überführen Sie $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $z_3 = -3 - 3\mathrm{i}$ und $z_4 = 1 - \mathrm{i}$ in die polare (trigonometrische) Form $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ und in die exponentielle Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und berechnen Sie damit

$z_1 \cdot z_2,\ z_1 \cdot \overline{z_2},\ z_4^2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \dfrac{z_1^2}{z_2^3 \cdot z_4}$ und z_4^7. Das Ergebnis ist jeweils in der kartesischen (algebraischen/arithmetischen) Form $z = a + b\mathrm{i}$ anzugeben.

Lösung:

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$, $z_2 = \cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$,

$z_3 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi\right) = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi\mathrm{i}}$, $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{7}{4}\pi\mathrm{i}}$.

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\pi\right) = -2.$

Trigonometrische und exponentielle Form von $\overline{z_2}$:

$$\begin{aligned}\overline{z_2} &= \cos\tfrac{2}{3}\pi - \mathrm{i}\sin\tfrac{2}{3}\pi = \cos\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right)\\ &= \cos\left(2\pi - \tfrac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\pi - \tfrac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}}\end{aligned}$$

$z_1 \cdot \overline{z_2} = 2 \cdot 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}.$

$z_4^2 = (\sqrt{2})^2\left(\cos\left(2 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\ \sin\frac{14}{4}\pi\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -2\mathrm{i}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned}\frac{z_1^2}{z_2^3 \cdot z_4} &= \frac{2^2}{1^3 \cdot \sqrt{2}}\left(\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3} - 3 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{37}{12}\pi\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right) \approx -2.73 + 0.73\mathrm{i}\end{aligned}$$

$z_4^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\left(7 \cdot \frac{7}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\frac{49}{4}\pi\right) = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8 + 8\mathrm{i}$

5. Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.

Lösung:

$$z = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{4} = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}+3\mathrm{i}-\sqrt{3}}{4} = \mathrm{i}$$

$\Longrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0,\ \mathrm{Im}(z) = 1$

Lösungsvariante: Nenner in trigonometrischer Form

$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2,\ \tan\varphi = -\sqrt{3}.$

4. Quadrant $\Longrightarrow \varphi = \arg z = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{3}\pi.$

$$z = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)}{2(\cos\frac{5}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi)} = \frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi\right)\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \mathrm{i}$$

6. Welche komplexen Zahlen erfüllen die nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen? Skizzieren Sie die Lösungsmengen in der Gaußschen Zahlenebene.

   a) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = c,\ \ c \in \mathbb{R}$

   Lösung:

   Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ergibt sich $x + y = c$ bzw. $y = -x + c$. Dies beschreibt eine Gerade mit dem Anstieg -1, die die y-Achse bei c schneidet.

   b) $1 \leq |z-2| \leq 4$

   Lösung:

   Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ergibt sich $1 \leq (x-2)^2 + y^2 \leq 16$. Dies beschreibt einen Kreisring mit dem Mittelpunkt $(2, 0)$, Innenradius 1 und Außenradius 4.

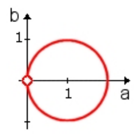
   c) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} = 1$

   Lösung:

   Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ergibt sich

$$\frac{1}{x+y\mathrm{i}} + \frac{1}{x-y\mathrm{i}} = \frac{x-y\mathrm{i}+x+y\mathrm{i}}{(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})} = \frac{2x}{x^2+y^2} = 1$$
$$2x = x^2 + y^2$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

   wobei der Punkt $z = 0$, der in der gegebenen Gleichung im Nenner steht, ausgenommen werden muss. Die Gleichung beschreibt eine Kreislinie mit Radius 1 um den Mittelpunkt $z = 1$, ausgenommen $z = 0$.



d) $|z+1| \leq |z-1|$

Lösung:

Mit $z = x + \mathrm{i}y$ ergibt sich

$$\begin{aligned} |x+\mathrm{i}y+1| &\leq |x+\mathrm{i}y-1| \\ \sqrt{(x+1)^2+y^2} &\leq \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ x^2+2x+1+y^2 &\leq x^2-2x+1+y^2 \\ x &\leq 0, \quad y \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

d. h. $\mathrm{Re}(z) \leq 0$, es handelt sich also um alle Punkte auf und links der imaginären Achse (2. und 3. Quadrant). (Beachte: Das Quadrieren einer Ungleichung war *hier* ausnahmsweise eine äquivalente Umformung, da beide Seiten nichtnegativ waren.)

Man kann die gegebene Ungleichung auch gleich geometrisch so interpretieren, dass der Abstand von z zur Zahl 1 kleiner oder gleich dem Abstand zur Zahl -1 ist. Die Zahl z hat jeweils den gleichen Abstand zu -1 und zu 1, wenn sie auf der Mittelsenkrechten beider Punkte liegt, d. h. auf der imaginären Achse. Der Abstand zu 1 ist daher kleiner, wenn z links dieser Geraden liegt.

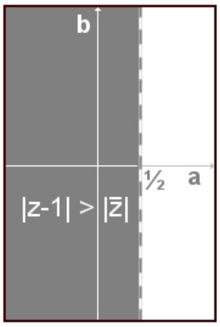
7. In welchem Bereich der Gaußschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z, die die folgenden Ungleichungen erfüllen?

a) $|z-1| > |\overline{z}|$

Lösung:

Mit $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} |z-1| &> |\overline{z}| \\ |a+b\mathrm{i}-1| &> |a-b\mathrm{i}| \\ \sqrt{(a-1)^2+b^2} &> \sqrt{a^2+b^2} \\ a^2-2a+1+b^2 &> a^2+b^2 \\ -2a+1 &> 0 \\ a &< \frac{1}{2}, \quad b \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \end{aligned}$$



Es handelt sich also um die Halbebene links der Geraden $x = \frac{1}{2}$ (ohne Rand). (Beachte: Das Quadrieren einer Ungleichung war *hier* ausnahmsweise eine äquivalente Umformung, da beide Seiten nichtnegativ waren.)

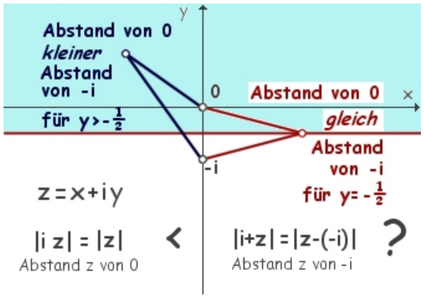
Man kann die gegebene Ungleichung auch geometrisch so interpretieren, dass der Abstand von z zur Zahl 1 größer ist als der Abstand zum Nullpunkt (beachte $|\overline{z}| = |z|$). Die Zahl z hat jeweils den gleichen Abstand zu 1 und zu 0, wenn sie auf der Mittelsenkrechten beider Punkte liegt, d. h. auf der Geraden $x = \frac{1}{2}$. Der Abstand zu 1 ist daher größer, wenn z links dieser Geraden liegt.

b) $|\mathrm{i} \cdot z| < |\mathrm{i} + z|$

Lösung:

Mit $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)| &< |\mathrm{i} + x + \mathrm{i}y| \\
|-y + \mathrm{i}x| &< |x + \mathrm{i}(y + 1)| \\
\sqrt{(-y)^2 + x^2} &< \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \\
y^2 + x^2 &< x^2 + y^2 + 2y + 1 \\
0 &< 2y + 1 \\
y &> -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$



Die Lösungsmenge der Ungleichung sind also alle $z \in \mathbb{C}$, die in der Gaußschen Zahlenebene oberhalb der Geraden $\operatorname{Im}(z) > -\frac{1}{2}$ liegen. (Beachte: Das Quadrieren einer Ungleichung war *hier* ausnahmsweise eine äquivalente Umformung, da beide Seiten nichtnegativ waren.)

Die Lösung lässt sich auch durch geometrische Überlegungen finden: Wegen $|\mathrm{i}z| = |z| = |z - 0|$ und $|\mathrm{i} + z| = |z - (-\mathrm{i})|$ sind die gesuchten Punkte z gerade die, deren Abstand von 0 kleiner ist als ihr Abstand von $-\mathrm{i}$ (siehe Skizze).Die Zahl z hat jeweils den gleichen Abstand zu $-\mathrm{i}$ und zu 0, wenn sie auf der Mittelsenkrechten beider Punkte liegt, d. h. auf der Geraden $y = -\frac{1}{2}$. Der Abstand zu 0 ist daher größer, wenn z oberhalb dieser Geraden liegt.

c) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z + 2}{z}\right) = 2$

Lösung:

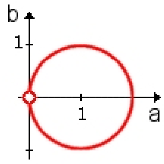
Mit $z = a + b\mathrm{i}$, $a, b \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{z + 2}{z} &= \frac{a + \mathrm{i}b + 2}{a + \mathrm{i}b} \cdot \frac{a - \mathrm{i}b}{a - \mathrm{i}b} = \frac{a^2 + \mathrm{i}ab + 2a - \mathrm{i}ab + b^2 - 2\mathrm{i}b}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a^2 + 2a + b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2b}{a^2 + b^2}\mathrm{i} \quad (a^2 + b^2 \neq 0,\ \text{da } z \neq 0 \text{ sein muss}).
\end{aligned}$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{z + 2}{z}\right) = \frac{a^2 + 2a + b^2}{a^2 + b^2} &= 2 \\
a^2 + 2a + b^2 &= 2(a^2 + b^2) \\
a^2 - 2a + b^2 &= 0 \\
(a - 1)^2 - 1 + b^2 &= 0 \\
(a - 1)^2 + b^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt einen Kreis vom Radius 1 um den Punkt 1 mit Ausnahme des Nullpunktes.



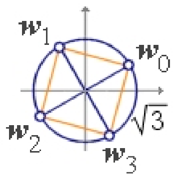
8. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen w der folgenden Gleichungen und skizzieren Sie die Lage der Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

   a) $2w^4 + 9 = 9\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

   Lösung:

$$\begin{aligned} w^4 &= -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 9\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)\right) \\ w_k &= \sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, 3 \end{aligned}$$

$w_0 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$, $w_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $w_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$



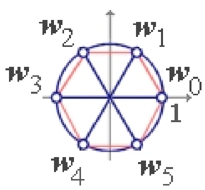
   b) $w^6 = 1$

   Lösung:

$$\begin{aligned} w^6 &= 1 \cdot \mathrm{e}^{(0+2k\pi)\mathrm{i}} \\ w_k &= \sqrt[6]{1} \cdot \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}, \quad k = 0, \ldots, 5 \end{aligned}$$

$w_0 = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}} = 1, \quad w_1 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\mathrm{i}), \quad w_2 = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}),$

$w_3 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1, \quad w_4 = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}), \quad w_5 = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\mathrm{i})$



9. Berechnen Sie (nur) die komplexen Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$w^8 + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = 0,$$

die im *ersten* Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegen, und geben Sie diese in kartesischer (algebraischer/arithmetischer) Form an. Wieviele verschiedene Lösungen besitzt die Gleichung insgesamt?

Lösung:

Zu lösen ist die Gleichung

$$w^8 = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right),$$

denn $\left|-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $\arg\left(-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right) = \arctan\sqrt{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$ (3. Quadrant).

Damit besitzt die Gleichung insgesamt die 8 Lösungen

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{8}\right) \\ &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad k = 0, \dots, 7. \end{aligned}$$

Davon liegen im ersten Quadranten die, für deren Argument φ_k gilt

$$\varphi_k = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2} \iff k \le \frac{4}{3}, \quad \text{also } k = 0, 1.$$

In kartesischer Form sind dies also

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[8]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right), \\ w_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{12}\pi\right) \approx 0.28 + 1.05\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$

10. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften komplexer Zahlen

a) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

Lösung:

Mit $z = a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ haben wir

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + b\mathrm{i} + a - b\mathrm{i}}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z).$$

b) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$

Lösung:

Mit $z = a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ haben wir

$$\frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}} = \frac{a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i})}{2\mathrm{i}} = \frac{2b\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = b = \mathrm{Im}(z).$$

c) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

Lösung:

Mit $z = a + b\mathrm{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ haben wir

$\sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(a + b\mathrm{i}) \cdot (a - b\mathrm{i})} = \sqrt{a^2 - (b\mathrm{i})^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$

11. Beweisen Sie (durch einfaches Nachrechnen mit $z = a + b\mathrm{i}$) die folgenden Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

Lösung:

Mit $z_j = a_j + b_j\mathrm{i}$ $(a_j, b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2)$ haben wir

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \pm z_2} &= \overline{(a_1 + b_1\mathrm{i}) \pm (a_2 + b_2\mathrm{i})} = \overline{(a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\mathrm{i}} \\ &= (a_1 \pm a_2) - (b_1 \pm b_2)\mathrm{i} = (a_1 - b_1\mathrm{i}) \pm (a_2 - b_2\mathrm{i}) = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}\end{aligned}$$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Lösung:

Mit $z_j = a_j + b_j\mathrm{i}$ $(a_j, b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2)$ haben wir

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1\mathrm{i}) \cdot (a_2 + b_2\mathrm{i})} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i} \\ &= (a_1 - b_1\mathrm{i}) \cdot (a_2 - b_2\mathrm{i}) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a_1 + b_1\mathrm{i}}{a_2 + b_2\mathrm{i}}\right)} = \overline{\left(\frac{(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\mathrm{i})(a_2 - b_2\mathrm{i})}\right)} \\ &= \overline{\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,\mathrm{i}} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,\mathrm{i} \\ &= \frac{(a_1 - b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})}{(a_2 - b_2\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i})} = \frac{a_1 - b_1\mathrm{i}}{a_2 - b_2\mathrm{i}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.\end{aligned}$$

12. Beweisen Sie mit Hilfe von Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen:
Ist z_0 eine komplexe Lösung der Gleichung $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ mit *reellen* Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_0}$ Lösung dieser Gleichung. (Verwenden Sie bekannte Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen und die Beziehung $\overline{0} = 0$.)

Lösung:

Bekannte Eigenschaften komplexer Zahlen sind $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$ sowie speziell für Potenzen $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$.

Reelle Zahlen sind komplexe Zahlen, deren Imaginärteil verschwindet, deshalb gilt für *reelle* Zahlen a die Beziehung $\overline{a} = a$, insbesondere ist $\overline{0} = 0$.

Mit diesen Eigenschaften komplexer Zahlen ist die Behauptung einfach zu beweisen: Ist z_0 eine komplexe Lösung der Gleichung $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ mit *reellen* Koeffizienten a_i, $i = 0, \ldots, n$, so gilt $a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$. Geht man auf beiden Seiten der Gleichung zum konjugiert Komplexen über, so erhält man unter Ausnutzung der eingangs aufgeführten Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} &= \overline{0} \\
\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} &= \overline{0} \\
\overline{a_n}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} &= \overline{0} \\
a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{z_0} + a_0 &= \overline{0} = 0
\end{aligned}$$

Also ist auch $\overline{z_0}$ Lösung dieser Gleichung.