TU Bergakademie Freiberg
Vorl. Frau Prof. Dr. Swanhild Bernstein

Freiberg, den 15. November 2022

(Höhere) Mathematik für Ingenieure 1
Vorbereitungs-/Hausaufgaben Zahlenreihen

1. Bestimmen Sie eine Bildungsvorschrift für die (endliche oder unendliche) Folge der Summenglieder. Schreiben Sie die Summe mit dem Summenzeichen. Starten Sie die Summation in jedem Fall sowohl α) mit $n = 0$ als auch β) mit $n = 1$.

   a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$

   Lösung:

   α) $\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{(n+1)^2}$ $\qquad$ β) $\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^2}$

   b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots$

   Lösung:

   α) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ $\qquad$ β) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

   c) $2 + 6 + 18 + 54$

   Lösung:

   $2(1 + 3 + 9 + 27)$ (Partialsumme einer geometrischen Reihe mit $q = 3$)

   α) $2\sum_{n=0}^{3} 3^n$ $\qquad$ β) $2\sum_{n=1}^{4} 3^{n-1}$

2. Berechnen Sie die folgenden (endlichen) Summen durch Aufsummieren

   a) $\sum_{n=1}^{4} n$

   Lösung:

   $$\sum_{n=1}^{4} n = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

   oder: $\ldots = \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = 10$ (Gaußsche Formel für Summe der ersten n natürlichen Zahlen)

b) $\sum_{n=0}^{5} 2$

Lösung:

$2+2+2+2+2+2 = 6 \cdot 2 = 12$

c) $\sum_{n=0}^{4} \frac{n+3}{4}$

Lösung:

$\frac{1}{4}(3+4+5+6+7) = \frac{25}{4}$

d) $\sum_{n=1}^{4} (n + (-1)^n)$

Lösung:

$\sum_{n=1}^{4} n + \sum_{n=1}^{4} (-1)^n = 1+2+3+4 \quad + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 10$

3. Untersuchen Sie, welche der angegebenen Reihen geometrische Reihen sind!

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Lösung:

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \Longrightarrow$ Quotient nicht konstant $\Longrightarrow$ keine geom. Reihe

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{3^{i-1}}$

Lösung:

$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{2^{i+2}}{3^i} \cdot \frac{3^{i-1}}{2^{i+1}} = \frac{2}{3}$

oder

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{3^{i-1}} = 2 \cdot 3 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$

$\Longrightarrow$ geom. Reihe mit Quotient $q = \frac{2}{3}$.

c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{1/k}$

Lösung:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{1/(k+1)}}{2^{1/k}} = 2^{-1/(k(k+1))}$$

$\Longrightarrow$ Quotient nicht konstant $\Longrightarrow$ keine geom. Reihe

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^{3n-4}}{7^{2-3n}}$

Lösung:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{3n-1}}{7^{-1-3n}} \cdot \frac{7^{2-3n}}{5^{3n-4}} = 5^3 \cdot 7^3 = 35^3$$

oder

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^{3n-4}}{7^{2-3n}} = \frac{3 \cdot 5^{-4}}{7^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5^3)^n}{(7^{-3})^n} = \frac{147}{625} \sum_{n=1}^{\infty} \left(35^3\right)^n$$

$\Longrightarrow$ geom. Reihe mit Quotient $q = 35^3$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n)$

Lösung:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{5}{2} \neq \frac{a_2}{a_1} = \frac{13}{5} \Longrightarrow \text{Quotient nicht konstant} \Longrightarrow \text{keine geom. Reihe}$$

4. Berechnen Sie für die folgenden geometrischen Zahlenfolgen das Anfangsglied a_1, den Quotienten q und die 15. Partialsumme.

a) $a_n = \dfrac{1}{3}\, 2^{n-1}$

Lösung:

$$a_1 = \frac{1}{3},\ q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,\ s_{15} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{15} 2^{n-1} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{14})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = -\frac{1}{3} \cdot (1 - 2^{15}) = \frac{2^{15} - 1}{3} = \frac{32767}{3}$$

b) $a_n = \dfrac{3^n}{4^{n-1}}$

Lösung:

$$a_1 = 3,\ q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{4},$$

$$s_{15} = 4 \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 4 \cdot \frac{3}{4} \left(1 + \frac{3}{4} + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^{14}\right)$$

$$= 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{15}}{1 - \frac{3}{4}} = 12 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{15}\right) = 12 \cdot \frac{4^{15} - 3^{15}}{4^{15}}$$

c) $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n+1}$

Lösung:

$a_1 = -4$, $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -2$,

$s_{15} = 2\sum_{n=1}^{15}(-2)^n = 2(-2 + 2^2 - 2^3 + \ldots - 2^{15})$

$= -4 \cdot (1 - 2 + (-2)^2 + \ldots + (-2)^{14}) = -4 \cdot \frac{1+2^{15}}{1+2} = -43692$

5. Berechnen Sie n und a_n der geometrischen Zahlenfolge, wenn folgende Werte gegeben sind:

a) $a_4 = \dfrac{27}{2}, \quad q = 3, \quad s_n = 20$

Lösung:

$a_4 = a_1 q^3 = 27a_1 \Longrightarrow a_1 = \dfrac{1}{2}$

Weiter gilt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$,

hier also $s_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1-3^n}{-2} = \dfrac{3^n - 1}{4} = 20 \Longrightarrow 3^n = 81 \Longrightarrow n = 4$

(a_4 ist bereits gegeben)

b) $a_1 = 3, \quad a_5 = 48, \quad s_n = 21$

Lösung:

$a_5 = 48 = 3q^4 \Longrightarrow q^4 = 16 \Longrightarrow q = 2$

Weiter gilt $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$,

hier also $s_n = 3 \cdot \dfrac{1-2^n}{1-2} = 21 \Longrightarrow 2^n = 8 \Longrightarrow n = 3$, $a_3 = 12$

6. Berechnen Sie die folgenden endlichen geometrischen Summen.

a) $\sum_{i=1}^{10} \dfrac{2}{3^{i-1}}$

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{2}{3^{i-1}} = 6 \cdot \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^i = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^9}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3\left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)}{2} = 3 - \frac{1}{3^9} = \frac{3^{10} - 1}{3^9}$$

b) $\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^7}\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{1024}$$

7. Welche der gegebenen unendlichen Reihen sind konvergent? Begründen Sie ihre Antwort und berechnen sie für diese konvergenten Reihen die Summe.

a) $\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}=\frac{3\cdot 2}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{k}$$

geom. Reihe mit $q=\frac{5}{2}\Longrightarrow$ divergent, da $|q|\geq 1$

b) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{7^{i+1}}$

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{7^{i+1}}=\frac{3}{7}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{i}$$

geom. Reihe mit $q=\frac{1}{7}\Longrightarrow$ konvergent, da $|q|<1$

Summe: $\frac{3}{7}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{i}=\frac{3}{49}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{i}=\frac{3}{49}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{3}{56}.$

8. a) Begründen Sie die Konvergenz der Reihe $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}}$ und berechnen Sie S.

Lösung:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{24}\left(\frac{8}{9}\right)^{k}=\frac{1}{24}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n}}{1-\frac{8}{9}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^{n}\right)\to S=\frac{1}{3}.$$

Konvergenz liegt vor, weil es sich um eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $q=\frac{8}{9}$ handelt und folglich $|q|<1$ gilt.

Nur Konvergenz erhält man z. B. auch aus dem Quotienten-Kriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{8^k}{3^{2k+3}}\cdot\frac{3^{2k+1}}{8^{k-1}} = \frac{8}{9} < 1 \Longrightarrow \text{konvergent.}$$

b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2p)^k}{k+3}$ auf Konvergenz (abhängig von $p \in \mathbb{R}$).

<u>**Lösung:**</u>

Quotienten-Kriterium: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(2\,p)^{k+1}}{k+4}\cdot\frac{k+3}{(2\,p)^k}\right| = 2\,|p|\,\frac{k+3}{k+4} \to 2\,|p|$

$\Longrightarrow$ konvergent, falls $|p| < \frac{1}{2}$, divergent, falls $|p| > \frac{1}{2}$.

Die Fälle mit $|p| = \frac{1}{2}$ müssen gesondert untersucht werden:

$p = \frac{1}{2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}$, divergent (*harmonische* Reihe).

$p = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+3}$, konvergent nach Leibnizkriterium.

9. Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe geeigneter Konvergenzkriterien (notwendiges Konvergenzkriterium, Quotienten-, Wurzel-, Vergleichs-, Leibniz-Kriterium) auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

<u>**Lösung:**</u>

Quotientenkrit.: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n} = \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3} < 1 \Longrightarrow$ Reihe *konvergent*

oder Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1 \Longrightarrow$ Reihe *konvergent.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

<u>**Lösung:**</u>

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!} = 3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to \frac{3}{\mathrm{e}} > 1$$

$\Longrightarrow$ die Reihe *divergiert.*

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

<u>**Lösung:**</u>

alternierende Reihe (abwechselnde Vorzeichen). $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\Longrightarrow |a_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad (n \to \infty)$ und ist monoton fallend

$\Longrightarrow$ *Konvergenz* nach Leibnizkriterium.

(Bemerkung: Quotienten- und Wurzelkriterium liefern hier kein Ergebnis, da

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = \sqrt{1} = 1,$$

ebenso $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n^{1/2})^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n^{1/n})^{1/2}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt{1} = 1$ (Stetigkeit der Wurzelfkt.))

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{1+b^n} \quad (b>0)$

Lösung:

Quotientenkriterium: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{b^{n+1}}{1+b^{n+1}} \cdot \dfrac{1+b^n}{b^n}\right| = b \cdot \dfrac{1+b^n}{1+b^{n+1}} \quad (b>0!)$

$0 < b < 1 \Longrightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to b < 1$, konvergent.

$b = 1 \Longrightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, nicht entscheidbar; direkt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, bestimmt divergent.

$b > 1 \Longrightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = b \cdot \dfrac{b^n(\frac{1}{b^n}+1)}{b^n(\frac{1}{b^n}+b)} = b \cdot \dfrac{\frac{1}{b^n}+1}{\frac{1}{b^n}+b} \to b \cdot \dfrac{1}{b} = 1$, nicht entscheidbar; jedoch gilt $a_n = \dfrac{b^n}{1+b^n} = \dfrac{1}{\frac{1}{b^n}+1} \to 1$, notwendige Konvergenzbedingung nicht erfüllt, divergent.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

Lösung:

Die Reihe ist *divergent*, wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ ist die notwendige Konvergenzbedingung nicht erfüllt.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Lösung:

Wegen $|\sin n| < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| = \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| = \dfrac{|\sin n|}{n^2} < \dfrac{1}{n^2}$ und folglich ist die betrachtete Reihe konvergent nach *Vergleichskriterium*, denn $\sum \frac{1}{n^2}$ ist eine *konvergente Majorante*