TU Bergakademie Freiberg
Vorl. Frau Prof. Dr. Swanhild Bernstein

Freiberg, den 6. Januar 2023

(Höhere) Mathematik für Ingenieure 1
Hausaufgaben Integralrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels linearer Substitution:

a) $\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t = -3x,\ \mathrm{d}t = -3\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + c$$

b) $\int \frac{1}{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t = x+1,\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{1}{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}(x+1)^{-4} + c$$

c) $\int 3\sqrt{7x-5}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$t = 7x-5,\ \mathrm{d}t = 7\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int 3\sqrt{7x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}(7x-5)^{3/2} + c = \frac{2}{7}(7x-5)^{3/2} + c$$

d) $\int \sinh\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t = \frac{x}{2},\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2} \Longrightarrow \int \sinh\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

e) $\int \frac{1}{2-2x}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t = 2-2x,\ \mathrm{d}t = -2\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{1}{2-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|2-2x| + c$$

f) $\int \frac{1}{(2-2x)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t = 2-2x,\ \mathrm{d}t = -2\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{1}{(2-2x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2-2x)^{-1} + c$$

g) $\displaystyle\int \frac{2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t=\frac{x}{2},\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{2} \Longrightarrow \int \frac{2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale durch geeignete Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t=\ln x,\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int t\ \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}+c = \frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$t=\sin x,\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t}+c = -\frac{1}{\sin x}+c$$

c) $\displaystyle\int \cosh^3 x\ \sinh x\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$t=\cosh x,\ \mathrm{d}t=\sinh x\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int \cosh^3 x\ \sinh x\,\mathrm{d}x = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4}+c = \frac{\cosh^4 x}{4}+c$$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(4x+7)}$

Lösung:

$t=4x+7,\ \mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(4x+7)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{\tan t}{4}+c = \frac{\tan(4x+7)}{4}+c$$

e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x^2)}}$

Lösung:

$t=\sqrt{3}\,x,\ \mathrm{d}t=\sqrt{3}\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin t + c = \frac{\arcsin(\sqrt{3}\,x)}{\sqrt{3}}+c$$

f) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$t = x^2+1,\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^{3/2}+c = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+c$$

g) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$t = 5+\cos x,\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\Longrightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}+c = -2\sqrt{5+\cos x}+c$$

3. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$v = x,\ u' = \cos x$

$$\Longrightarrow \int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + c$$

b) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$v = x^2,\ u' = \sin x$

$$\Longrightarrow \int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Nochmals part. Int. mit $v = x,\ u' = \cos x$ (vgl. vorige Aufg.)

$$\ldots = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

c) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$v = x,\ u' = \mathrm{e}^{3x}$

$$\Longrightarrow \int x\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - \int 1\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{3}\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x} + c$$

d) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$v = \arctan x,\ u' = 1$

$\Longrightarrow \int \arctan x \,\mathrm{d}x = x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x \,\mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

(Typ: $\int \frac{f(x)}{f'(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$)

$\ldots = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$

e) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

Lösung:

$v = \ln x,\ u' = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$\Longrightarrow \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = (\ln x)\, 2x^{\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{x} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\, \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x$

$= 2\sqrt{x}\, \ln x - 4\sqrt{x} + c = 2\sqrt{x}\, (\ln x - 2) + c$

f) $\int (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$

Lösung:

$v = (\ln x)^2,\ u' = 1$

$\Longrightarrow \int (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x = (\ln x)^2\, x - \int \frac{2 \ln x}{x} \cdot x \,\mathrm{d}x = x\, (\ln x)^2 - 2 \int \ln x \,\mathrm{d}x$

Nochmals part. Int. mit $v = \ln x,\ u' = 1$

$\ldots = x\, (\ln x)^2 - 2 \left((\ln x)\, x - \int \frac{1}{x} \cdot x \,\mathrm{d}x \right) = x\, (\ln x)^2 - 2x\, \ln x + 2x + c$

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \,\mathrm{d}x$

Lösung:

Ansatz: $\frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}$

Multiplikation mit Nenner:

$$2x^2 + 41x - 91 = A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x+3) \quad (1)$$

Einsetzen der reellen Nennernullstellen:

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad -48 = -12A \Longrightarrow A = 4 \\ x = -3: &\quad -196 = 28B \Longrightarrow B = -7 \\ x = 4: &\quad 105 = 21C \Longrightarrow C = 5. \end{aligned}$$

Oder: Ausmultiplizieren von (1), Zusammenfassen gleicher Potenzen und Koeffizientenvergleich bei diesen:

$2x^2+41x-91 = \ldots = (A+B+C)\,x^2+(-A-5B+2C)\,x+(-12A+4B-3C)$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} A+B+C &= 2\\ -A-5B+2C &= 41\\ -12A+4B-3C &= -91 \end{aligned}$$

Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt $A = 4$, $B = -7$, $C = 5$.

Integration:

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4}{x-1}+\frac{-7}{x+3}+\frac{5}{x-4}\right)\mathrm{d}x$$

$= 4\ln|x-1| - 7\ln|x+3| + 5\ln|x-4| + c$

b) $\displaystyle\int \frac{9x^2-2x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Ansatz: $\displaystyle\frac{9x^2-2x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$

Multiplikation mit Nenner:

$$9x^2-2x+9 = A(x-1)(x^2+2x+5)+B(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2 \quad (2)$$

Einsetzen der reellen Nennernullstelle liefert bereits B:

$$x=1: \quad 16 = 8B \Longrightarrow B = 2.$$

Weiter: Ausmultiplizieren von (2), Zusammenfassen gleicher Potenzen und Koeffizientenvergleich bei diesen:

$9x^2-2x+9 = \ldots$

$= (A+C)x^3+(A+B-2C+D)x^2+(3A+2B+C-2D)x+(-5A+5B+D)$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} A + C &= 0\\ A+B-2C+D &= 9\\ 3A+2B+C-2D &= -2\\ -5A+5B +D &= 9 \end{aligned}$$

Lösen des linearen Gleichungssystems ergibt $A = 1$, $B = 2$ (schon vorher ermittelt), $C = -1$, $D = 4$

Integration:

$$\int \frac{9x^2-2x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-x+4}{x^2+2x+5}\right)\mathrm{d}x$$

$= \ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \dfrac{5}{2}\arctan\dfrac{x+1}{2} + c.$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

<u>**Lösung:**</u>

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x| - 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2-6}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

<u>**Lösung:**</u>

$$\int \frac{x^2-6}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-5}{(x-1)^3}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{2(x-1)} + c$$

e) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+9x^3+4x^2-4x-7}{x^3-3x-2}\,\mathrm{d}x$

<u>**Lösung:**</u>

Integrand ist unecht gebrochene rationale Funktion (Grad des Zählerpolynons nicht kleiner als Grad des Nennerpolynons) $\Longrightarrow$ Abspalten des ganzrationalen Anteils durch Polynomdivision:

$$(-2x^5+9x^3+4x^2-4x-7) : (x^3-3x-2) = -2x^2+3+\frac{5x-1}{x^3-3x-2}$$

Integration des ganzrationalen Anteils:

$$\int (-2x^2+3)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}x^3 + 3x + c$$

Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Anteils:

Nullstellen des Nenners:

- Erste Nullstelle $x_1 = -1$ durch „Probieren“ mit Teilern des Absolutgliedes -2
- Abspalten des Linearfaktors $(x - x_1)$ durch Polynomdivision:

  $(x^3-3x-2) : (x+1) = x^2-x-2$
- Nullstellen des quadratischen Restpolynoms: $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

  $\Longrightarrow$ Faktorzerlegung des Nenners: $x^3-3x-2 = (x+1)^2(x-2)$

Ansatz für PBZ des echt gebrochenen Anteils

$$\frac{5x-1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Multiplikation mit Nenner:

$$5x - 1 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2 \tag{3}$$

Ausmultiplizieren:

$5x - 1 = (A + C)\, x^2 + (-A + B + 2C)\, x + (-2A - 2B + C)$

Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x^0 & : & -2A & - & 2B & + & C & = & -1 \\ x^1 & : & -A & + & B & + & 2C & = & 5 \\ x^2 & : & A & & & + & C & = & 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow A = -1,\ B = 2,\ C = 1$

(Die Koeffizienten B und C können schon vor Aufstellung des Gleichungssystems einfach durch Einsetzen der Nullstellen $x = -1$ bzw. $x = 2$ in (3) bestimmt werden. Statt das obige Gleichungssystem mittels Koeffizientenvergleich aufzustellen, kann man dann den Koeffizienten A auch durch Einsetzen einer weiteren Stelle in (3) ermitteln.)

Integration der Partialbrüche:

$$\int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2} \right) \mathrm{d}x = -\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + \ln|x-2| + c$$

Zusammenfassung:

$$\int \frac{-2x^5 + 9x^3 + 4x^2 - 4x - 7}{x^3 - 3x - 2}\, \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}x^3 + 3x - \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + \ln|x-2| + c$$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10}\, \mathrm{d}x$

Lösung:

Integrand ist unecht gebrochene rationale Funktion (Grad des Zählerpolynons nicht kleiner als Grad des Nennerpolynons) $\Longrightarrow$ Abspalten des ganzrationalen Anteils durch Polynomdivision:

$$(2x^2 + 9x + 12) : (x^2 + 6x + 10) = 2 - \frac{3x + 8}{x^2 + 6x + 10} \tag{4}$$

Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Anteils:

Das quadratische Nennerpolynom $x^2 + 6x + 10$ hat keine reellen Nullstellen. Da im Zähler eine lineare Funktion steht, *ist* daher der echt gebrochene Anteil von (4) bereits die PBZ.

Integration:

$$\int \frac{2x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10}\, \mathrm{d}x = \int \left(2 - \frac{3x + 8}{x^2 + 6x + 10} \right) \mathrm{d}x$$

$$= 2x - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 6x + 10) + \arctan(x + 3) + c$$

g) $\displaystyle\int \frac{x^4+10x^2-5x-1}{x^3-x^2+4x-4}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(Unecht gebrochen-rationaler Integrand, daher zunächst Polynomdivision, dann PBZ für echt gebrochenen Anteil)

$$\int \frac{x^4+10x^2-5x-1}{x^3-x^2+4x-4}\,\mathrm{d}x = \int \left(x+1+\frac{7x^2-5x+3}{x^3-x^2+4x-4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\int \frac{7x^2-5x+3}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\int \left(\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+x+\int \left(\frac{1}{x-1}+\frac{6x+1}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+3\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+c$$

5. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int x^2\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

part. Int.: $v=x^2$, $u'=\cos(3x)$

$$\Longrightarrow \int x^2\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x$$

Nochmals part. Int. mit $v=x$, $u'=\sin(3x)$:

$$\ldots = \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\int \cos 3x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{27}\right)\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x + c$$

b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ (Hinweis: Drücken Sie $\sin^2 x$ durch $\cos x$ aus.)

Lösung:

Wegen $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ haben wir zunächst

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Substitution $t=\cos x,\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$ ergibt sich daraus

$$-\int \frac{1-t^2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-1}{t^4}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+c = \frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c.$$

Dieses Vorgehen funktioniert prinzipiell immer bei einer rationalen Funktion von $\cos x$, multipliziert mit einer ungeraden Potenz von $\sin x$.

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

Lösung:

Substitution $t = \mathrm{e}^x$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \Longrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan t + c = \arctan \mathrm{e}^x + c$$

Dieses Vorgehen funktioniert prinzipiell immer bei einer rationalen Funktion von e^x.

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution $t = \mathrm{e}^x$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \Longrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$

$$\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t \underset{\text{Polynomdiv.}}{=} \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + c = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \mathrm{e}^x + \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) + c$$

Dieses Vorgehen funktioniert prinzipiell immer bei einer rationalen Funktion von e^x.

6. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution $t = 1 + \sqrt{x}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2(t-1)\,\mathrm{d}t$,

Grenzen substituieren: $x = 1 \Longrightarrow t = 2$, $x = 9 \Longrightarrow t = 4$

$$\Longrightarrow \int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{t-1}{t}\,2(t-1)\,\mathrm{d}t = 2\int_2^4 \frac{t^2-2t+1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int_2^4 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = 2\left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right)\Bigg|_2^4 = 4 + 2\ln 2$$

Ähnliches Vorgehen (allgemein Subst. $t = \sqrt{x}$) funktioniert prinzipiell immer bei einer rationalen Funktion von $\sqrt{x}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Zunächst bestimmen wir eine Stammfunktion des Integranden. Es liegt ein Integral der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ vor. Die Substitution

$$t = f(x) = \mathrm{e}^x - 1, \quad \mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

führt daher auf $\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln|\mathrm{e}^x - 1| + c$.

Der Integrand hat aber eine Polstelle bei $x = 0$ (Nenner geht *von beiden Seiten* gegen 0, Zähler$\neq 0$) und ist somit im Integrationsintervall unbeschränkt, es liegt also ein *uneigentliches Integral* vor. Wir können daher nicht einfach die Grenzen -1 und 1 in eine Stammfunktion einsetzen, sondern müssen für die beiden Teile des Integrals *links und rechts der Polstelle unabhängig voneinander* eine Grenzwertbetrachtung vornehmen, indem wir ein Stück des Integrationsintervalls in einer Umgebung der Polstelle abschneiden und die entsprechende Grenze dann gegen die Polstelle 0 streben lassen.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x + \lim_{\mu \to +0} \int_{\mu}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x,$$

wobei die beiden Grenzwerte *einzeln und unabhängig voeinander* existieren müssen. (Die beiden Teilintervalle werden also links und rechts der Polstelle nicht symmetrisch zueinander beschnitten.) Wir haben aber

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\underbrace{\ln \underbrace{\left| \frac{1}{\mathrm{e}^\varepsilon} - 1 \right|}_{\to 0}}_{\to -\infty} - \ln \left| \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 \right| \right) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{\mu \to +0} \int_{\mu}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\mu \to +0} \left(\ln|\mathrm{e} - 1| - \underbrace{\ln \underbrace{|\mathrm{e}^\mu - 1|}_{\to 0}}_{\to -\infty} \right) = -\infty.$$

Die beiden uneigentlichen Teilintegrale und damit das gesamte uneigentliche Integral sind also divergent.

c) $\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Substitution $t = \sqrt{x^2 - 1}$, $\mathrm{d}t = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{t}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow x\,\mathrm{d}x = t\ \mathrm{d}t$

Grenzen substituieren: $x = 1 \Longrightarrow t = 0$, $x = 2 \Longrightarrow t = \sqrt{3}$.

$$\Longrightarrow \int_1^2 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

Weiter mit partieller Integration: $v = t$, $u' = \mathrm{e}^t$:

$$\ldots = \left(t\,\mathrm{e}^t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left((t-1)\mathrm{e}^t\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \mathrm{e}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)+1$$

7. Berechnen Sie den Flächeninhalt, der eingeschlossen wird von

   a) der Kurve $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$ und der x-Achse

   Lösung:

   Es gilt $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x = x(x^2 - 7x + 10) = 0$ für $x = 0$, $x = 2$, $x = 5$ sowie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Damit folgt

$$A = \left|\int_0^2 (x^3 - 7x^2 + 10x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_2^5 (x^3 - 7x^2 + 10x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{16}{3} + \frac{189}{12} = \frac{253}{12}.$$

   b) den Kurven $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{1-x}$ und der x-Achse.

   Lösung:

   $y = 2\sqrt{x}$ ist definiert für $x \geq 0$, $y = \sqrt{1-x}$ für $x \leq 1$. Schnittpunkte können daher nur im Intervall $[0,1]$ liegen. Es ergibt sich als Schnittpunkt

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= \sqrt{1-x} \\ 4x &= 1-x \\ x &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

   (Quadrieren ist hier äquivalente Umformung, da beiden Seiten nichtnegativ.) Die von beiden Kurven (und der x-Achse) eingeschlossene Fläche hat den Inhalt:

$$A = 2\int_0^{\frac{1}{5}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}}^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{5}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{5}}^1 = \frac{4}{15}\sqrt{5}.$$

8. An welcher Stelle x_0 schneidet eine Senkrechte die x-Achse, wenn durch sie die Fläche unter der Kurve $y = \mathrm{e}^{x/2}$ zwischen $x = 0$ und $x = 4$ halbiert wird?

   Lösung:

$$\int_0^{x_0} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^4 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \iff 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big|_0^{x_0} = 2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big|_{x_0}^4$$

$$\iff \mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}} - 1 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}} \iff \mathrm{e}^{\frac{x_0}{2}} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{2} \iff x_0 = 2\,\ln\left(\frac{\mathrm{e}^2+1}{2}\right).$$

9. Das Kurvenstück $y = \mathrm{e}^x$, $0 \leq x \leq \ln 2$, rotiere um die x-Achse. Man berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Lösung:

$$V = \pi \int_0^{\ln 2} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{2\ln 2} - \mathrm{e}^0\right) = \frac{3}{2}\pi.$$

10. Berechnen Sie das Volumen des Paraboloids, das durch Rotation der Kurve $y = \sqrt{2x}$ um die x-Achse zwischen den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ entsteht.

Lösung:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{2x}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 2x \,\mathrm{d}x = \pi\, x^2\Big|_0^1 = \pi.$$

11. Untersuchen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Integrale und bestimmen Sie ggf. ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

Lösung:

Bei einem beidseitig unendlichen Integrationsintervall ist dieses an einer (sofern nicht noch weitere kritische Stellen vorhanden sind) beliebigen Stelle c aufzuteilen, und die beiden uneigentlichen Teilintegrale sind unabhängig voneinander zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \arctan a + \lim_{b\to\infty} \arctan b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}$

Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \tanh a + \lim_{b\to\infty} \tanh b = -(-1) + 1 = 2.$$

c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

Lösung:

(Die Polstellen 0 und 1 liegen außerhalb des Integrationsintervalls, so dass das Integral lediglich wegen des unbeschränkten Intervalls uneigentlich ist.)

$$\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int_{\mathrm{e}}^b \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Substitution $t = \ln x,\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ mit neuen Grenzen $t = 1$ und $t = \ln b$ ergibt

$$\ldots = \lim_{b\to\infty}\int_1^{\ln b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{b\to\infty} \ln|t|\Big|_1^{\ln b} = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) = \infty,$$

das Integral ist also (bestimmt) divergent.

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(nx)\,\mathrm{d}x$

<u>**Lösung:**</u>

$$\int_0^{\infty} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\lim_{b\to\infty}\sin(nb)$$

existiert nicht (die Sinusfunktion oszilliert zwischen -1 und 1), das Integral ist also unbestimmt divergent (wir betrachten den Grenzübergang $b \to \infty$, aber n ist konstant!).

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$

<u>**Lösung:**</u>

Zunächst Stammfunktion des Integranden: Bis auf Vorzeichen Integral der Form $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \frac{\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = -\ln|1-\sin x| + c.$

Polstelle bei $x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow$ unbeschränkter Integrand.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{-\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|1-\sin x|\Big|_0^{\pi/2-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) = \infty,$$

Integral ist (bestimmt) divergent.

f) $\displaystyle\int_0^{9} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

<u>**Lösung:**</u>

Der Integrand hat eine Polstelle bei $x = 1$ (geht *von beiden Seiten* gegen ∞), wir müssen daher für die beiden Teile des Integrals *links und rechts der Polstelle unabhängig voneinander* eine Grenzwertbetrachtung vornehmen.

$$\begin{aligned}\int_0^{9} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \lim_{\varepsilon\to +0}\int_0^{1-\varepsilon}(1-x)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x + \lim_{\mu\to +0}\int_{1+\mu}^{9}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to +0} -3\sqrt[3]{(1-x)}\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\mu\to +0} 3\sqrt[3]{(x-1)}\Big|_{1+\mu}^{9} \\ &= \lim_{\varepsilon\to +0}\left(-3\sqrt[3]{\varepsilon}\right) + 3 + 6 - \lim_{\mu\to +0} 3\sqrt[3]{\mu} = 9.\end{aligned}$$