TU Bergakademie Freiberg
Vorl. Frau Prof. Dr. Swanhild Bernstein

Freiberg, den 3. Februar 2023

(Höhere) Mathematik für Ingenieure 1
Hausaufgaben Funktionenreihen

1. Untersuchen Sie die folgenden Potenzreihen auf Konvergenz. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} x^n$ (Hier *nur* Konvergenzradius gesucht)

   Lösung:

   $$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}$$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1} x^n$

   Lösung:

   $$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

   Randpunkte des Konvergenzintervalls:

   $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$. Wegen $\frac{1}{n-\frac{1}{2}} > \frac{1}{n}$ ist harmonische Reihe *divergente* Minorante.

   $x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2(2n-1)}$ *konvergiert* nach Leibnizkriterium.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

   Lösung:

   $$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \text{Konvergenz nur für } x = 0$$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

   Lösung:

   $$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty \Longrightarrow \text{Reihe konvergiert für alle } x \in \mathbb{R}.$$

2. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-\pi)^k}{k(k+1)}$

<u>**Lösung:**</u>

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-\pi)^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(k+1)} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^k$

$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{k}\right) = \frac{1}{2}.$

Konvergent für $|x - \frac{\pi}{2}| < \frac{1}{2}$, d. h. $\frac{\pi - 1}{2} < x < \frac{\pi+1}{2}$,

divergent für $|x - \frac{\pi}{2}| > \frac{1}{2}$.

Randpunkte:

$x = \frac{\pi+1}{2}$ bzw. $2x - \pi = 1$:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

$= \lim_{k\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + - \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$

$\Longrightarrow$ Reihe konvergiert

$x = \frac{\pi-1}{2}$ bzw. $2x - \pi = -1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ konvergiert nach Leibnizkriterium.

$\Longrightarrow$ Konvergenzbereich: $\left[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi+1}{2}\right]$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

<u>**Lösung:**</u>

Formel für Konvergenzradius $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ nicht anwendbar, da die Koeffizienten bei geraden Potenzen von x Null sind.

Direkte Anwendung des Quotientenkriteriums auf die Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ ergibt:

$q := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{2^{k+1}(2k+1)} \cdot \frac{2^k(2k-1)}{|x|^{2k-1}} = \frac{|x|^2}{2} \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k+1} = \frac{|x|^2}{2}$

Wir haben $q < 1$ und damit Konvergenz für $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ sowie

$q > 1$ und damit Divergenz für $|x| > \sqrt{2}$.

Punkte mit $q = 1$ (das sind dann gerade die Randpunkte des Konvergenzintervalls) extra untersuchen:

$x = \sqrt{2}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(\sqrt{2})^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}(2k-1)}$,

$x = -\sqrt{2}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(-\sqrt{2})^{2k-1}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+k-1}}{\sqrt{2}(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{2}(2k-1)}$.

Beide Reihen sind konvergent nach dem Leibnizkriterium. Der Konvergenzbereich der Reihe ist also $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k+3}$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k+3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^k$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+3} \cdot \frac{n+4}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{n+3} = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ konvergent für $|x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, d. h. $-1 < x < 0$, divergent für $|x + \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.

Randpunkte des Konvergenzintervalls:

$x = 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+3} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k} \Longrightarrow$ divergent (harmonische Reihe).

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+3}$ konvergiert nach Leibniz-Kriterium.

Konvergenzbereich: $-1 \le x < 0$.

Lösungsvariante:

Quotientenkriterium für Ausgangsreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ mit $u_k(x) = \frac{(2x+1)^k}{k+3}$:

$$q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2x+1)^{n+1}}{n+4} \cdot \frac{n+3}{(2x+1)^n}\right|$$

$$= |2x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+4} = |2x+1|$$

Konvergenz für $q < 1$, Divergenz für $q > 1$, Punkte mit $q = 1$ extra untersuchen führt zu obigen Ergebnissen.

3. Entwickeln Sie $f(x) = \cos^2 x$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$ in einer Taylorreihe.
Hinweis: Fassen Sie die erste Ableitung mittels Doppelwinkelformel zu einer Winkelfunktion zusammen, um für höhere Ableitungen die Produktregel zu vermeiden!

Lösung:

$f(x) = \cos^2 x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$

$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x,\ f'(\frac{\pi}{4}) = -1, \qquad f''(x) = -2\cos 2x,\ f''(\frac{\pi}{4}) = 0$

$f'''(x) = 4\sin 2x,\ f'''(\frac{\pi}{4}) = 4, \qquad f^{(4)}(x) = 8\cos 2x,\ f^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 0, \ldots.$

Allgemein:

$f^{(2k-1)}(x) = (-1)^k\, 2^{2k-2}\ \sin 2x,\ f^{(2k-1)}(\frac{\pi}{4}) = (-1)^k\, 4^{k-1},$

$f^{(2k)}(x) = (-1)^k\, 2^{2k-1}\ \cos 2x,\ f^{(2k)}(\frac{\pi}{4}) = 0,\ k = 1, 2, \ldots.$

Taylorreihe: $\displaystyle \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{k-1}}{(2k-1)!}\ (x - \frac{\pi}{4})^{(2k-1)}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} - (x - \frac{\pi}{4}) + \frac{2}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3 - + \ldots$

4. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = (x+1)\sinh x$. Berechnen Sie zunächst die ersten 4 *nichtverschwindenden* Glieder der Potenzreihenentwicklung $\sum a_k\, x^k$ von $f(x)$ in $x_0 = 0$ und versuchen Sie anschließend, eine allgemeine Darstellung für die Koeffizienten a_k zu finden.

Lösung:

$y^{(k)}(x)$	$y^{(k)}(x_0)$	$a_k = \dfrac{y^{(k)}(x_0)}{k!}$
$y = (x+1)\sinh x$	$y(0) = 0$	$a_0 = 0$
$y' = \sinh x + (x+1)\cosh x$	$y'(0) = 1$	$a_1 = 1$
$y'' = 2\cosh x + (x+1)\sinh x$	$y''(0) = 2$	$a_2 = 1$
$y''' = 3\sinh x + (x+1)\cosh x$	$y'''(0) = 1$	$a_3 = \frac{1}{6}$
$y^{(4)} = 4\cosh x + (x+1)\sinh x$	$y^{(4)}(0) = 4$	$a_4 = \frac{1}{6}$
$\vdots$		
$y^{(2l-1)} = (2l-1)\sinh x + (x+1)\cosh x$	$y^{(2l-1)}(0) = 1$	$a_{2l-1} = \frac{1}{(2l-1)!}$
$y^{(2l)} = (2l)\cosh x + (x+1)\sinh x$	$y^{(2l)}(0) = 2l$	$a_{2l} = \frac{1}{(2l-1)!}$

Taylorreihe von f: $\displaystyle x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2l-1)!}x^{2l-1} + \frac{1}{(2l-1)!}x^{2l} + \ldots$

5. Entwickeln Sie $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ in $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie deren Konvergenzbereich. (Hinweis: geometrische Reihe verwenden)

Lösung:

$$\frac{2}{2-x} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

Dies können wir als Summe einer geometrischen Reihe mit $q = \dfrac{x}{2}$ darstellen:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^k.$$

Die Reihe konvergiert bekanntlich genau dann, wenn $|q|=\left|\frac{x}{2}\right|<1$ gilt, also für $|x|<2$ bzw. $-2<x<2$. Eine konvergente Potenzreihe ist im Konvergenzbereich zwangsläufig gleich der Taylorreihe ihrer Summe.

6. Gegeben ist die Funktion $y=f(x)=\sinh^2 x+1$.

   a) Berechnen Sie die ersten 4 *nichtverschwindenden* Glieder der Taylorreihenentwicklung von $f(x)$ in $x_0=0$. (Verwenden Sie Formeln für doppelte Argumente, um Ableitungen zu vereinfachen)

   b) Geben Sie durch Verallgemeinerung der Rechnungen aus a) den allgemeinen Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ an.

   c) Bestimmen Sie die Potenzreihe von $f(x)$ in $x_0=0$ unter Verwendung der bekannten Reihe für e^x.

   Lösung:

$y^{(n)}(x)$	$y^{(n)}(x_0)$	$a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$
$y=\sinh^2 x+1$	$y(0)=1$	$a_0=1$
$y'=2\sinh x\cosh x$		
$=\sinh 2x$	$y'(0)=0$	$a_1=0$
$y''=2\cosh 2x$	$y''(0)=2$	$a_2=\frac{2}{2!}=1$
$y'''=4\sinh 2x$	$y'''(0)=0$	$a_3=0$
$y^{(4)}=8\cosh 2x$	$y^{(4)}(0)=8$	$a_4=\frac{8}{4!}=\frac{1}{3}$
$y^{(5)}=16\sinh 2x$	$y^{(5)}(0)=0$	$a_5=0$
$y^{(6)}=32\cosh 2x$	$y^{(6)}(0)=32$	$a_6=\frac{32}{6!}=\frac{2}{45}$
$\vdots$		
$y^{(2k-1)}=2^{2k-2}\sinh 2x$	$y^{(2k-1)}(0)=0$	$a_{2k-1}=0$
$y^{(2k)}=2^{2k-1}\cosh 2x$	$y^{(2k)}(0)=2^{2k-1}$	$a_{2k}=\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}$
		$k=1,2,\dots$

   a) $\sinh^2 x+1=1+x^2+\dfrac{1}{3}x^4+\dfrac{2}{45}x^6+\dots$

   b) $a_0=1\quad,\quad a_{2k-1}=0\quad,\quad a_{2k}=\dfrac{2^{2k-1}}{(2k)!}\quad,\quad k=1,2,\dots$

   c) $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$

$$\sinh^2 x + 1 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - \underbrace{2e^x e^{-x}}_{=2} + e^{-2x}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-2x)^n\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\left(1 + (-1)^n\right) x^n\right) + \frac{1}{2}$$
(Koeffizienten verschwinden für ungeradzahlige $n = 2k - 1$)
$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \cdot 2 \cdot x^{2k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} x^{2k} + \frac{1}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$$

7. Aus der gegebenen Reihe $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ (für $-1 < x \leq 1$) sind die Reihenentwicklung für $\ln \frac{1+x}{1-x}$ und der zugehörige Konvergenzbereich zu bestimmen.

Lösung:

$$\ln(1-x) = \ln(1 + (-x)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n}\right), \; -1 < (-x) \leq 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} + 1\right) \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\, x^{2k-1}}{2k-1}$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right), \; -1 < x < 1.$$

8. Entwickeln Sie $f(x) = \ln \frac{x}{e^{2x}}$ für $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Wie lässt sich die gesuchte Reihe aus der Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (\text{für } -1 < x \leq 1)$$

herleiten?

Lösung:

$f(x) = \ln \frac{x}{e^{2x}} = \ln x - 2x, \; f'(x) = \frac{1}{x} - 2, \; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \; n \geq 2.$

$$f(x) = -2 - (x-1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.$$

Herleitung aus der Reihe für $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},\ -1 < x \leq 1$$

$$\Longrightarrow \ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - + \ldots,\ -1 < x-1 \leq 1,$$

$$f(x) = \ln x - 2x$$

$$= \ln x - 2(x-1) - 2 = -2 - (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - + \ldots,\ 0 < x \leq 2.$$

9. a) Entwickeln Sie $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ in eine Taylorreihe (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

   b) Berechnen Sie aus dem Taylorpolynom 4. Grades einen Näherungswert für $f(0.1)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Funktionswert. Schätzen Sie das Restglied $R_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\, x^5 \quad (\xi \in (0, |x|)$ betragsmäßig ab.

   c) Bestimmen Sie die gesuchte Reihe für $f(x)$ durch Differentiation aus der bekannten Reihe für $\ln(1+x)$.

   d) Durch geeignete Substitution und anschließende Integration ist aus der Reihe für $f(x)$ die Potenzreihenentwicklung für $\arctan x$ zu gewinnen.

Lösung:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x},\ x_0 = 0$

$$\Longrightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}},\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Longrightarrow \text{Taylorreihe: } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots$$

alternativ: Mittels der geometrischen Reihe erhalten wir sofort

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Bei diesem Vorgehen ergibt sich auch sofort, dass die Reihe genau im Falle $|-x| = |x| < 1$ konvergiert und ihre Summe $f(x)$ ist.

b) $T_4(f, x, 0) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, $T_4(f, 0.1, 0) = 0.9091$

(zum Vergleich: $f(0.1) = 0.\overline{90}$)

Restgliedabschätzung:

$$|R_4(f, 0.1, 0)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} (0.1)^5 \right| = \left| (-1)^5 \frac{(0.1)^5}{(1+\xi)^6} \right| = 10^{-5} \frac{1}{(1+\xi)^6} < 10^{-5},$$

weil $\xi \in (0, 0.1)$

c) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,x^{n-1} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k.$$

d) Substitution $x = t^2$ in die Reihe für $\frac{1}{1+x}$ liefert:

$\dfrac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,t^{2(n-1)}$. Damit:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (-1)^{n-1}\,t^{2(n-1)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,t^{2n-1}\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,x^{2n-1}.$$

10. Entwickeln Sie $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ in eine Potenzreihe und berechnen Sie damit eine Reihendarstellung für $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

(*Hinweis:* Die Reihe für $f(t)$ lässt sich einfach aus der bekannten Reihe für e^x gewinnen.)

Lösung:

Bekannt ist $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ (mit Konvergenzradius $r = \infty$).

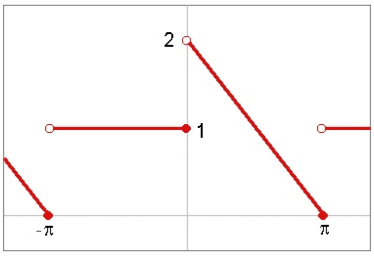
Substitution $x = -t^2$ liefert $\mathrm{e}^{-t^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{t^{2k}}{k!}$, gliedweise Integration ergibt

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^k\,\frac{t^{2k}}{k!}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)k!}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - + \ldots.$$

11.

Die Funktion $f(x)$ (Skizze) sei 2π-periodisch. Geben Sie für $f(x)$ eine analytische Darstellung an, untersuchen Sie auf Symmetrie und entwickeln Sie $f(x)$ in einer Fourierreihe.



Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \le 0 \\ -\frac{2}{\pi}x + 2, & 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+2\right)\,\mathrm{d}x\right) = 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos kx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+2\right)\cos kx\,\mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi^2\,k^2}\,(1-\cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2\,k^2}, & k = 2l-1 \\ 0, & k = 2l \end{cases}, l = 1,2,\ldots \quad \text{(partielle Integration beim zweiten Integral)}$$

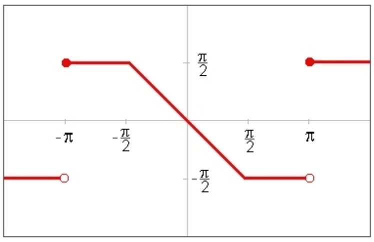
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin kx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+2\right)\sin kx\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\pi\,k}\,(1+\cos k\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2l-1 \\ \dfrac{2}{\pi\,k}, & k = 2l \end{cases}, l = 1,2,\ldots,$$

$$\widehat{f}(x) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^2\,(2l-1)^2}\cos{(2l-1)x} + \frac{1}{\pi\,l}\sin 2lx\right)$$

12.

Die Funktion $f(x)$ (Skizze) sei 2π-periodisch. Geben Sie für $f(x)$ eine analytische Darstellung an, untersuchen Sie auf Symmetrie und entwickeln Sie $f(x)$ in einer Fourierreihe (bis $n = 5$).



Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ -x, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

ist offenbar ungerade, besitzt also eine reine Sinus-Reihe (d. h. $a_k = 0$):

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} -x\sin kx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\frac{\pi}{2}\sin kx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi k^2}\sin k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}\cos k\pi$$

$$\widehat{f}(x) = \left(-\frac{2}{\pi}-1\right)\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \left(\frac{2}{9\pi}-\frac{1}{3}\right)\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \left(-\frac{2}{25\pi}-\frac{1}{5}\right)\sin 5x + \ldots$$

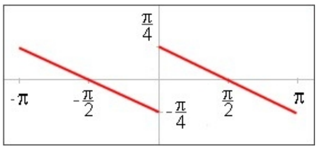
13. a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & -\pi < x \le 0 \\ \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ in eine Fourierreihe.

b) Welche Werte liefert die Reihe aus a) für $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$? Wieso stimmen diese Werte mit $f(0)$ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ überein bzw. nicht überein?

c) Konstruieren Sie aus der Kenntnis der Reihensumme für $x = \frac{\pi}{4}$ eine (Zahlen-)Reihe, die selbst gegen $\frac{\pi}{4}$ konvergiert.

Lösung:

a) $f(x)$ ist offenbar *ungerade* (siehe Skizze), folglich ist $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$.



$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin kx \;\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{-\cos kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos kx \;\mathrm{d}x}_{=0}$$

$$= \frac{\cos k\pi + 1}{2k} = \frac{(-1)^k + 1}{2k} = \begin{cases} 0 & ,k = 2l-1 \\ \frac{1}{k} & ,k = 2l \end{cases} \quad ,l = 1, 2, \ldots$$

$$\Longrightarrow \widehat{f}(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l\,x)}{2l}$$

b) $\widehat{f}(0) = 0$, berechnet aus der Reihe bzw. wegen $\widehat{f}(0) = \dfrac{f(+0)+f(-0)}{2}$.

$\widehat{f}(0) \neq f(0) = -\frac{\pi}{4}$, Sprungstelle von $f(x)$.

$\widehat{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$, Stetigkeitspunkt von $f(x)$.

c) $$\frac{\pi}{8} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l\,\frac{\pi}{4})}{2l} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(l\,\frac{\pi}{2})}{l} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{2l-1}$$

14. Skizzieren Sie die Funktion f und entwickeln Sie sie in eine Fourierreihe (bis $n = 8$):

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{\pi}{2}, & -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 0, & -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$$

Lösung:

$f(x)$ ist offenbar gerade, besitzt also eine reine Cosinusreihe ($b_k = 0$):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k^2\pi}\left(\cos k\pi - \cos k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\widehat{f}(x) = \frac{\pi}{8} - \frac{2}{\pi}\cos x + \frac{4}{4\pi}\cos 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + 0\cdot\cos 4x$$
$$- \frac{2}{25\pi}\cos 5x + \frac{4}{36\pi}\cos 6x - \frac{2}{49\pi}\cos 7x + 0\cdot\cos 8x + \ldots$$

Algemein gilt:

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{2}{k^2\pi}, & k = 4l+1 \\ \dfrac{4}{k^2\pi}, & k = 4l+2 \\ -\dfrac{2}{k^2\pi}, & k = 4l+3 \\ 0, & k = 4l+4 \end{cases} \qquad l = 0, 1, 2 \dots$$

$$\widehat{f}(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{(4l+1)^2} \cos{(4l+1)x} + \frac{2}{(4l+2)^2} \cos{(4l+2)x} - \frac{1}{(4l+3)^2} \cos{(4l+3)x} \right)$$

15. Ermitteln Sie die Fourierreihe zu der 2π-periodischen Rechteckschwingung
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Lösung:

$f(x)$ ist offenbar *ungerade*, also $a_k = 0,\ k = 0, 1, \dots$.

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi} (-\cos k\pi + 1)$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2l \\ \dfrac{4}{k\pi}, & k = 2l-1 \end{cases} \qquad l = 1, 2, \dots \qquad \Longrightarrow \widehat{f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin{(2l-1)\,x}}{2l-1}$$