TU Bergakademie Freiberg
Vorl. Frau Prof. Dr. Swanhild Bernstein

Freiberg, den 8. Februar 2023

(Höhere) Mathematik für Ingenieure 1
Hausaufgaben Matrizen

1. Man berechne, falls möglich, $A+B$, $B-A$, $3A$, $A-\frac{1}{2}B$, A^T, A^T+B, AB, AC, A^TB, C^TC und CC^T für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

<u>**Lösung:**</u>

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B-A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -6 \\ -11 & -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 21 & 15 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 9 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 27 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$A^TB = \begin{pmatrix} -26 & 8 & 40 \\ -26 & -24 & 36 \\ 0 & 32 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^TC = 30, \quad CC^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die Produkte AB, BA, AB^T, BA^T, A^TB^T für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>**Lösung:**</u>

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA^T = (AB^T)^T, \quad A^TB^T = (BA)^T$$

3. Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB, BA, AO, AE und EB für

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & -12 \end{pmatrix}, \quad AO = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AE = A, \quad EB = B$$

4. Berechnen Sie X aus der Matrizengleichung $B \cdot C^T - X^T = 2A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$X = (BC^T - 2A)^T = \begin{pmatrix} -13 & 24 & 0 \\ 13 & -9 & 37 \end{pmatrix}$$

5. Bestimmen Sie a, b, c, d aus der Matrizengleichung

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ d & 4 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\left[\begin{pmatrix} 4 & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ d & 4 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 1+2d \\ 6+c & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 19+2d & 18a + b(1+2d) \\ 13+c & a(6+c)+7b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c & 2c \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert für das Feld $(2,1)$ den Wert $c = -1$ und danach für das Feld $(1,1)$ den Wert $d = -\frac{23}{2}$. Damit erhält man anschließend mittels der Felder $(1,2)$ und $(2,2)$ das Gleichungssystem $5a + 7b = 6$, $18a - 22b = -2$ mit der Lösung $a = b = -\frac{1}{2}$.

6. Bestimmen Sie alle Matrizen X, die mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauschbar sind, d. h. für die $AX = XA$ gilt.

<u>**Lösung:**</u>

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} + x_{21} & x_{12} + x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

$$XA = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{11} + x_{12} \\ x_{21} & x_{21} + x_{22} \end{pmatrix}.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich bezüglich der beiden Produkte folgen die Bedingungen $x_{21} = 0$ und $x_{11} = x_{22}$. Damit haben die gesuchten Matrizen die Struktur $X = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ mit p, q beliebig reell.