TU Bergakademie Freiberg
Vorl. Frau Prof. Dr. Swanhild Bernstein

Freiberg, den 8. Februar 2023

(Höhere) Mathematik für Ingenieure 1
Hausaufgaben Lineare Gleichungssysteme, lineare (Un-)Abhängigkeit

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme. Geben Sie jeweils auch die Lösungsmenge des zugeordneten *homogenen* Systems an.

   a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -6 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & -1 \\ \boxed{1} & 6 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & -6 \\ \hline 0 & -16 & \boxed{5} & -10 \\ 0 & -23 & 9 & -18 \\ \hline 0 & \boxed{\frac{29}{5}} & 0 & 0 \end{array}$$

Aus den Leitzeilen erhält man das gestaffelte System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & - & 16x_2 & + & 5x_3 & = & -10 \\ & & \frac{29}{5}x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

und daraus die *eindeutige* Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Das zugeordnete *homogene* Systems hat nur die *triviale* Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

   b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 16 \end{array}$$

Lösung:

$$
\begin{array}{rrrr|r}
0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\
\boxed{-2} & 1 & -1 & 3 & 1 \\
2 & 4 & 3 & -1 & 1 \\
6 & -2 & -2 & -2 & 16 \\
\hline
0 & 3 & \boxed{1} & 2 & 3 \\
0 & 5 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & -5 & 7 & 19 \\
\hline
0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & -4 \\
0 & 16 & 0 & 17 & 34 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{-15} & -30
\end{array}
$$

Aus den Leitzeilen erhält man das gestaffelte System

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\
 & & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\
 & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & -4 \\
 & & & & & - & 15x_4 & = & -30
\end{array}
$$

und durch Rückwärtseinsetzen die eindeutige Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Das zugeordnete *homogene* Systems hat nur die *triviale* Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

c)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\
7x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \\
-x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & = & -4 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\
 & & 5x_2 & + & 17x_3 & = & 6
\end{array}
$$

Lösung:

$$
\begin{array}{rrr|r}
3 & -1 & 2 & 0 \\
7 & -4 & -1 & -2 \\
-1 & -3 & -12 & -4 \\
\boxed{-1} & 2 & 5 & 2 \\
0 & 5 & 17 & 6 \\
\hline
0 & \boxed{5} & 17 & 6 \\
0 & 10 & 34 & 12 \\
0 & -5 & -17 & -6 \\
0 & 5 & 17 & 6
\end{array}
$$

Aus den Leitzeilen erhält man das gestaffelte System

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\
 & & 5x_2 & + & 17x_3 & = & 6
\end{array}
$$

Mit dem freien Parameter $x_3 = s$ (Nichtleitvariable) ergibt sich daraus als allgemeine Lösung des gegebenen inhomogenen Systems

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{s \begin{pmatrix} 9/5 \\ 17/5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}}_{\text{allg. Lsg. des zugehörigen } \textit{homogenen} \text{ Systems}} \quad .$$

d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & & & + & 6x_3 & - & 3x_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & & & & & & & + & 3x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & & & = & -2 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & - & 3x_5 & = & -4 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ \hline 3 & 0 & 6 & \boxed{-3} & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & -6 & -3 & 2 \\ \hline \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Mit den freien Parametern $x_3 = s$, $x_5 = t$ (Nichtleitvariable) ergibt sich durch Auflösen der Leitgleichungen die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{+ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.}_{\text{allg. Lsg. des zugehörigen } \textit{homogenen} \text{ Systems}}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & = & -12 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 12 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -30 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rrrr|} \boxed{1} & 0 & -2 & -12 \\ -1 & 1 & -2 & 12 \\ 3 & -2 & 2 & -30 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}$$

Das gegebene inhomogene System ist unlösbar.

Für das zugeordnete *homogene* System hat man das gestaffelte System:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -2x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem freien Parameter $x_3 = t$ (Nichtleitunbekannte) erhält man dafür durch Rückwärtseinsetzen $\vec{x}_{\text{hom}} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

f)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Das gegebene inhomogene System ist unlösbar.

Für das zugeordnete *homogene* System hat man das gestaffelte System

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Mit den freien Parametern $x_3 = s$, $x_4 = t$ (Nichtleitunbekannte) erhält man dafür durch Rückwärtseinsetzen

$$\vec{x}_{\text{hom}} = s \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2. Für welche reellen $\alpha\,, \beta\,$, ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & 2x_3 & = & -\beta \end{array}$$

eindeutig lösbar, *nicht lösbar*, besitzt es *unendlich* viele Lösungen?

Bestimmen Sie für die Fälle $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha = -1$, $\beta = 2$ die Lösungmengen des Systems.

Für welches α ist das zugeordnete *homogene* System eindeutig (nur *trivial*) lösbar?

Lösung:

$$
\begin{array}{rrr|r}
\boxed{1} & -2 & 3 & -4 \\
2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & \alpha & 2 & -\beta \\
\hline
0 & 5 & \boxed{-5} & 10 \\
0 & \alpha+2 & -1 & 4-\beta \\
\hline
0 & \boxed{\alpha+1} & 0 & 2-\beta
\end{array}
$$

Das System

- ist eindeutig lösbar für $\alpha \neq -1$
- ist unlösbar, wenn $\alpha = -1$ und $\beta \neq 2$
- besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha = -1$ und $\beta = 2$.

Für $\alpha = \beta = 0$ ergibt sich das gestaffelte System

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = -4 \\
 & 5x_2 & -5x_3 & = 10 \\
 & x_2 & & = 2
\end{array}
$$

mit der eindeutigen Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für $\alpha = -1$, $\beta = 2$ ergibt sich das gestaffelte System

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = -4 \\
 & 5x_2 & -5x_3 & = 10
\end{array}
$$

und mit dem freien Parameter $x_3 = t$ die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

3. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & & & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -12 \\
-x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 12 \\
3x_1 & - & 2x_2 & + & ax_3 & - & 15x_4 & = & -30
\end{array} .
$$

   a) Für welche reellen Parameter a ist das lineare Gleichungssystem unlösbar, eindeutig lösbar, besitzt es unendlich viele Lösungen?

   b) Bestimmen Sie *alle* Lösungen des zugehörigen *homogenen* linearen Systems für $a = 2$.

Lösung:

a)

$$\begin{array}{rrcr|r}
\boxed{1} & 0 & -2 & -3 & -12 \\
-1 & 1 & -2 & 6 & 12 \\
3 & -2 & a & -15 & -30 \\
\hline
0 & \boxed{1} & -4 & 3 & 0 \\
0 & -2 & a+6 & -6 & 6 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{a-2} & 0 & 6
\end{array}$$

Das System

- ist für *kein* a eindeutig lösbar (es gibt immer mindestens eine Nichtleitvariable, die beliebige Werte annehmen kann)
- ist unlösbar, wenn $\alpha = 2$
- besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha \neq 2$.

b) Für $\alpha = 2$ ergibt im *homogenen* Fall sich das gestaffelte System

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\
 & & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0
\end{array}$$

und mit den freien Parametern $x_3 = s$, $x_4 = t$ (Nichtleitunbekannte) die allgemeine Lösung

$$\vec{x}_{\text{hom}} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

4. Untersuchen Sie das Vektorsystem $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{c} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$

($\vec{e}_i$: Vektoren der Standardbasis)

Lösung:

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist nur trivial lösbar, das Vektorsystem $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ist also linear unabhängig.

b) $\vec{a} = (2, -1, -3)^T$, $\vec{b} = (-2, 1, 1)^T$, $\vec{c} = (-4, 2, -4)^T$

Lösung:

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt die allgemeine Lösung

$\vec{x}_{\text{hom}} = t \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, und somit nichttriviale Lösungen, das Vektorsystem $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ist also linear abhängig. (Es gilt z. B. $-3\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.)

5. Bilden $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   Sind $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Linearkombinationen von $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$?

   a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   Zu untersuchen sind die Lösbarkeit des *homogenen* Systems $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ (also die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Vektoren) bzw. der *inhomogenen* Systeme $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}_i$, $i = 1, 2$. Die Rechnungen lassen sich simultan durchführen, wobei die rechte Seite des homogenen Systems nicht explizit angegeben werden muss, weil sie stets aus Nullen besteht.

$$
\begin{array}{rrr|r|r}
\boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\
\hline
0 & -2 & \boxed{1} & 2 & 0 \\
0 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
\hline
0 & \boxed{2} & 0 & -2 & -3
\end{array}
$$

   Die Systeme sind eindeutig lösbar, das homogene System besitzt nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ sind also linear unabhängig und bilden, da es sich um 3 linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen Raum handelt, eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

   $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ sind eindeutig als Linearkombination der $\vec{a}_i$ darstellbar, die Lösungen der inhomogenen Systeme ergeben die Koeffizienten der Linearkombinationen:

   $\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \qquad \vec{b}_2 = 8\vec{a}_1 - \frac{3}{2}\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3.$

   b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   Zu untersuchen sind die Lösbarkeit des *homogenen* Systems $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ (also die lineare Unabhängigkeit der gegebenen Vektoren) bzw. der *inhomogenen* Systeme $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}_i$, $i = 1, 2$. Die

Rechnungen lassen sich simultan durchführen, wobei die rechte Seite des homogenen Systems nicht explizit angegeben werden muss, weil sie stets aus Nullen besteht.

$$\begin{array}{rrr|r|r}
\boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 5 & 2 & 1 \\
\hline
0 & -2 & \boxed{-1} & 2 & 0 \\
0 & -2 & -1 & 2 & -3 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{array}$$

Das homogene System besitzt auch nichttriviale Lösungen (Nichtleitvariable x_2 als freier Parameter), die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ sind also linear abhängig und bilden damit keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

$\vec{b}_1$ ist als Linearkombination der $\vec{a}_i$ darstellbar, die Darstellung ist nicht eindeutig (freier Parameter x_2), z. B. ist (für $x_2 = 0$)

$\vec{b}_1 = 6\vec{a}_1 - 2\vec{a}_3$.

$\vec{b}_2$ ist nicht als Linearkombination der $\vec{a}_i$ darstellbar, da das zugehörige Gleichungssystem unlösbar ist.

6. Für welche reellen a sind die Vektoren $\vec{a}_1 = (2, -3, a, 3)^T$, $\vec{a}_2 = (1, -2, -1, 2)^T$, $\vec{a}_3 = (-a, 3, 4, -3)^T$ linear abhängig? Stellen Sie für solche a den dritten Vektor durch die beiden anderen dar.

Lösung:

Die Vektoren sind linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ nichttriviale Lösungen besitzt. (Wir lassen die Nullen auf der rechten Seite beim Gauß-Algorithmus weg.)

$$\begin{array}{rrr}
2 & \boxed{1} & -a \\
-3 & -2 & 3 \\
a & -1 & 4 \\
3 & 2 & -3 \\
\hline
\boxed{1} & 0 & -2a+3 \\
a+2 & 0 & -a+4 \\
-1 & 0 & 2a-3 \\
\hline
0 & 0 & 2(1-a^2) \\
0 & 0 & 0
\end{array}$$

Das ist der Fall für $a = \pm 1$, dafür erhält man das gestaffelte System

$$\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & +x_2 & -a\lambda_3 & = & 0 \\
-x_1 & & +(2a-3)\lambda_3 & = & 0
\end{array}$$

mit der Lösungsmenge ($x_3 = t$ freier Parameter)

$x_1 = (2a - 3)t$, $x_2 = -3(a - 2)t$, $t \in \mathbb{R}$.

Für die Darstellung des dritten Vektors durch die beiden ersten erhält man damit ($t = -1$ setzen, so dass $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}$ gilt):

$a = 1: \quad \vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 = \vec{a}_3$

$a = -1: \quad 5\vec{a}_1 - 9\vec{a}_2 = \vec{a}_3.$

7. Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie durch Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus ein *maximales* System linear unabhängiger Spaltenvektoren von B und stellen Sie die anderen Spalten als Linearkombination aus diesen dar.

b) Sei L die lineare Hülle der Spalten von B (Spaltenraum). Geben Sie die Dimension und eine Basis von L an.

c) Welchen Rang besitzt B?

Lösung:

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Man untersucht die Lösbarkeitseigenschaften des homogenen Gleichungssystems $x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3 + x_4\vec{b}_4 = \vec{0}$ aus den Spalten von B und rechnet dazu z. B. wie folgt:

$$\begin{array}{r|r|rr}
1 & 4 & -2 & -3 \\
3 & 2 & 0 & -1 \\
4 & 1 & \boxed{1} & 0 \\
3 & -8 & 6 & 7 \\
\hline
9 & 6 & 0 & -3 \\
3 & 2 & 0 & \boxed{-1} \\
4 & 1 & \boxed{1} & 0 \\
-21 & -14 & 0 & 7 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & -2 & 0 & \boxed{1} \\
4 & 1 & \boxed{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Die Spalten 3 und 4 der letzten Tabelle und damit auch $\vec{b}_3, \vec{b}_4$ sind linear unabhängig (Leitelemente in beiden Spalten), das homogene Gleichungssystem $x_3\vec{b}_3 + x_4\vec{b}_4 = \vec{0}$ ist nur trivial lösbar.

Interpretiert man die Spalten 1 und 2 als rechte Seiten der *inhomogenen* Systeme $x_3\vec{b}_3 + x_4\vec{b}_4 = \vec{b}_1$ bzw. $x_3\vec{b}_3 + x_4\vec{b}_4 = \vec{b}_2$, so ergibt sich aus der letzten Tabelle sofort deren eindeutige Lösung und daraus die gesuchte Darstellung von $\vec{b}_1$ bzw. $\vec{b}_2$:

$\vec{b}_1 : \quad x_3 = 4,\, x_4 = -3 \quad \Longrightarrow \vec{b}_1 = 4\vec{b}_3 - 3\vec{b}_4$

$\vec{b}_2 : \quad x_3 = 1,\, x_4 = -2 \quad \Longrightarrow \vec{b}_2 = \vec{b}_3 - 2\vec{b}_4.$

$\{\vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ ist also ein *maximales* System linear unabhängiger Spalten von B: Hinzunahme von $\vec{b}_1$ oder/und $\vec{b}_2$ ergibt ein linear abhängiges System.

b) Unter Ausnutzung der Darstellungen $\vec{b}_1 = 4\vec{b}_3 - 3\vec{b}_4$ und $\vec{b}_2 = \vec{b}_3 - 2\vec{b}_4$ aus a) kann man jede Linearkombination von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4$ auch als Linearkombination von $\vec{b}_3, \vec{b}_4$ darstellen. $L = \mathrm{Lin}\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\right)$ ist also ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$, der durch $\{\vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ erzeugt (aufgespannt) wird. Da die Menge $\{\vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ außerdem linear unabhängig ist, bildet sie eine Basis von L. Die Dimension von L ist damit 2 (Anzahl der Basisvektoren).

c) Der Rang der Matrix B ist 2 (Dimension des Spaltenraumes = Anzahl der Leitelemente).

8. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & \boldsymbol{s} \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & \boldsymbol{r}\,x_3 & = & 3 \end{array}$$

a) Für welche Werte der Parameter r, $s \in \mathbb{R}$ besitzt das System (i) keine Lösung, (ii) genau eine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Wie groß sind in den drei Fällen die Ränge der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Koeffizientenmatrix $\left(A|\vec{b}\right)$?

b) Welche Bedingungen muss der Parameter r erfüllen, damit die Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden?

c) Setzen Sie $r = 15$ und $s = -2$ und stellen Sie dafür den Vektor $\vec{b}$ der rechten Seite als Linearkombination der Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A dar.

Lösung:

a)

$$
\begin{array}{rrr|r}
\boxed{1} & -2 & 4 & s \\
0 & 1 & 2 & 3 \\
3 & -4 & r & 3 \\
\hline
0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\
0 & 2 & r-12 & -3s+3 \\
\hline
0 & 0 & \boxed{r-16} & -3s-3
\end{array}
$$

Aus der Rechnung folgt: Das System besitzt

(i) keine Lösung, wenn $r = 16$ und $s \neq -1$.

Dann ist $2 = \text{Rang}(A) < \text{Rang}(A|\vec{b}) = 3$.

(ii) genau eine Lösung, wenn $r \neq 16$, $s \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\vec{b}) = 3$.

(iii) unendlich viele Lösungen, wenn $r = 16$ und $s = -1$.

Dann ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|\vec{b}) = 2$.

b) Die 3 Spalten von A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn sie linear unabhängig sind, wenn also $\text{Rang}(A) = 3$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $r \neq 16$.

c) Für $r = 15$ und $s = -2$ ergibt aus den Leitzeilen das gestaffelte System

$$
\begin{array}{rrrcr}
x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & -2 \\
 & x_2 & +2x_3 & = & 3 \\
 & & -x_3 & = & 3
\end{array}
$$

mit der eindeutigen Lösung

$x_3 = -3$, $x_2 = 3 - 2x_3 = 9$, $x_1 = -2 + 2x_2 - 4x_3 = 28$.

Für die Darstellung des Vektor $\vec{b}$ der rechten Seiten durch die Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A ergibt das $\vec{b} = 28\,\vec{a}_1 + 9\,\vec{a}_2 - 3\,\vec{a}_3$.