Studiengang:	**Matrikelnummer:**

1	2	3	4	5	6	Z	Punkte	Note

Prüfungsklausur zum Modul
Höhere Mathematik für Ingenieure 1

15. 7. 2019, 8.00 - 11.00 Uhr

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, die vorgegebene *Tabelle von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln*, *Taschenrechner* (auch grafikfähig) aber **ohne** Computer-Algebra-System (CAS).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Das gilt insbesondere für auftretende Integrale, die durch Anwendung geeigneter Integrationsmethoden zu lösen sind. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: (7 P.)

(a) Welche komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ erfüllen *gleichzeitig* nachstehende Ungleichungen? Skizzieren Sie die Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

$$|\mathrm{i} + \overline{z}| \leq |\mathrm{i} + z| \quad \textit{und} \quad |2z + 1| < 8 \quad \textit{und} \quad \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) \geq 0$$

(b) Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $(1 - \mathrm{i})(z^3 + 9\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$ und geben Sie diese in der kartesischen (algebraischen) Form an.

Lösung:

(a) Mit der Darstellung $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y reell) erhalten wir für die erste Ungleichung

$$\begin{aligned} |\mathrm{i} + x - \mathrm{i}y| &\leq |\mathrm{i} + x + \mathrm{i}y| \\ |x + (1 - y)\mathrm{i}| &\leq |x + (1 + y)\mathrm{i}|. \end{aligned}$$

Quadrieren wir die Ungleichung in der letzten Zeile auf beiden Seiten (da beide Seiten nichtnegativ sind, ist dies hier eine äquivalente Umformung), folgt

$$\begin{aligned} |x + (1 - y)\mathrm{i}|^2 &\leq |x + (1 + y)\mathrm{i}|^2 \\ x^2 + (1 - y)^2 &\leq x^2 + (1 + y)^2 \\ x^2 + 1 - 2y + y^2 &\leq x^2 + 1 + 2y + y^2 \\ -2y &\leq 2y \\ 0 &\leq 4y \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Dies beschreibt die Halbebene oberhalb der reellen Achse einschließlich des Randes.

Alternativ können wir für die erste Ungleichung die Beziehungen $|w| = |\overline{w}|$ und $\overline{v+w} = \overline{v} + \overline{w}$ benutzen, die hier

$$|\mathrm{i} + \overline{z}| = |\overline{\overline{z} + \mathrm{i}}| = |z - \mathrm{i}|$$

liefern. Die erste Ungleichung lautet somit

$$|z - \mathrm{i}| \leq |z + \mathrm{i}|.$$

Das bedeutet, der Abstand von z zum Punkt i ist kleiner oder gleich dem Abstand vom z zum Punkt $-\mathrm{i}$. Nun hat z genau dann den gleichen Abstand zu den Zahlen i und $-\mathrm{i}$, wenn es auf der Mittelsenkrechten der Strecke zwischen beiden Zahlen liegt – d. h. auf der reellen Achse. Die z, die näher an i als an $-\mathrm{i}$ liegen, bilden dann die Halbebene *oberhalb* dieser Achse.

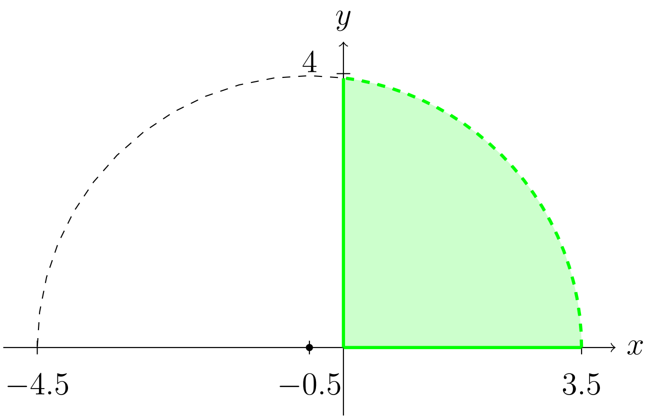
Für die zweite Ungleichung haben wir

$$\begin{aligned} |2z+1| = \left|2\left(z + \frac{1}{2}\right)\right| = 2\left|\left(z+\frac{1}{2}\right)\right| &< 8 \\ \left|\left(z+\frac{1}{2}\right)\right| &< 4. \end{aligned}$$

dies ist ein Kreis um den Mittelpunkt $-\frac{1}{2}$ mit dem Radius 4 ohne Rand.

Die dritte Ungleichung $x \cdot y \geq 0$ ist genau dann erfüllt, wenn x und y beide nichtnegativ oder beide nichtpositiv sind, d. h. $z = x + \mathrm{i}y$ liegt im ersten oder im dritten Quadranten (mit Rand).

Insgesamt ergibt sich das folgende Bild (grün markierte Menge – der gestrichelte Teil des Randes gehört nicht dazu):



(b) Wir formen die Gleichung so um, dass links die dritte Potenz der Unbekannten und rechts eine Konstante steht, die wir dann noch in der exponentiellen Form darstellen:

$$\begin{aligned} z^3 + 9\mathrm{i} &= \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2} = \frac{1+2\mathrm{i}-1}{2} = \mathrm{i} \\ z^3 &= -8\mathrm{i} = 8\,\mathrm{e}^{\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

Die drei Lösungen sind dann

$$z_k = \sqrt[3]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

In algebraischer Form erhalten wir somit

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i},\\
z_1 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i},\\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: **(6 P.)**

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n = \dfrac{n^2(2n-1)}{(n+2)^3}$ und $b_n = n^2\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$, sofern diese existieren.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{t^{n+1}}$? Geben Sie die Summe der Reihe für $t = 10$ an.

Lösung:

(a) Der erste Grenzwert ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ und ergibt durch Kürzen mit n^3

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n^2}{(n+2)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\frac{(n+2)^3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^3}\\
&= \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3} = \frac{2}{1^3} = 2.
\end{aligned}
$$

Beim zweiten Grenzwert ist der Teilausdruck in Klammern vom Typ $\infty - \infty$ und sollte daher zunächst auf den Hauptnenner gebracht und dadurch in einen Quotienten umgewandelt werden, der Gesamtausdruck ist dann wieder vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ und wird durch Kürzen mit n^2 berechnet:

$$
\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{n^2}} = 2.
$$

(b) Nach Herausziehen des Faktors $\frac{1}{3t}$ verbleibt eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $q = \frac{9}{t}$:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{t^{n+1}} = \frac{3^{-1}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{t^n} = \frac{1}{3t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^2)^n}{t^n} = \frac{1}{3t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{t}\right)^n.
$$

Bekanntlich konvergiert die geometrische Reihe genau dann, wenn

$$
|q| = \left|\frac{9}{t}\right| = \frac{9}{|t|} < 1
$$

gilt, also im Falle $|t| > 9$, d. h. $t > 9$ oder $t < -9$. (Da dieser Bereich den Punkt $t = 0$ nicht enthält, gibt es auch bzgl. des Vorfaktors $\frac{1}{3t}$ keine weitere Einschränkung.)

Im Falle $t = 10$ ergibt sich konkret mittels der Formel für die Summe der geometrischen Reihe (man beachte die untere Summationsgrenze!)

$$
\frac{1}{30} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{30} \cdot \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = \frac{3}{10}.
$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades für $f(x) = \dfrac{8}{2+\cos x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und berechnen Sie damit näherungsweise das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.
(6 P.)

(Das Integral soll *nicht* exakt berechnet werden.)

Lösung:

Hier müssen wir die Taylorkoeffizienten direkt mittels der Ableitungen ausrechnen, wir haben unter Verwendung der Ketten- und Quotientenregel

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{8\sin x}{(2+\cos x)^2},\\
f''(x) &= 8\,\frac{\cos(x)\cdot(2+\cos x)^2 - \sin(x)\cdot 2(2+\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^4}\\
&= 8\,\frac{\cos(x)\cdot(2+\cos x) + 2\sin^2 x}{(2+\cos x)^3}.
\end{aligned}
$$

Als Taylorkoeffizienten im Entwicklungspunkt 0 erhalten wir daher

$$
a_0 = f(0) = \frac{8}{3}, \qquad a_1 = f'(0) = 0, \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{4}{9}.
$$

Das entsprechende Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f,x,0)$ ist also:

$$
T_2(f,x,0) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}.
$$

Man kann das gesuchte bestimmte Integral näherungsweise berechnen, indem man statt der Funktion f ein Taylorpolynom von f genügend hohen Grades integriert:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_0^{\pi/2} T_2(f,x,0)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x\\
&= \left(\frac{4}{27}x^3 + \frac{8}{3}x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{9}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi^3}{54} \approx 4.76.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-a/x}$. Dabei sei $a > 0$ ein fester Parameter.
(9 P.)

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f_a.

(b) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von f_a.

(c) Berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und die einseitigen Grenzwerte für $x \to 0+$ und $x \to 0-$ und geben Sie anschließend den Wertebereich von $f_a(x)$ an.

(d) Zeigen Sie: $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln\big(f_a(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0$ für $a = 2$.

Lösung:

(a) Der Definitionsbereich ist $D_{f_a} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, d. h. die Funktion ist für alle $x \neq 0$ definiert (da x im Nenner des Exponenten steht).

Die Funktion f_a hat keine Nullstellen, da der Faktor $e^{-a/x}$ nie Null wird und die einzige Nullstelle von x^2 (nämlich $x = 0$) nicht zum Definitionsbereich gehört.

(b) Es gilt (Produkt- und Kettenregel)

$$f_a'(x) = 2x\mathrm{e}^{-a/x} + x^2\mathrm{e}^{-a/x}\frac{a}{x^2} = (2x+a)\mathrm{e}^{-a/x}$$

sowie

$$f_a''(x) = 2\mathrm{e}^{-a/x} + (2x+a)\mathrm{e}^{-a/x}\frac{a}{x^2} = \left(\frac{a(2x+a)}{x^2} + 2\right)\mathrm{e}^{-a/x}.$$

Die *notwendige* Bedingung für ein lokales Extremum ergibt

$$\begin{aligned} f_a'(x) = (2x+a)\mathrm{e}^{-a/x} &= 0 \\ 2x + a &= 0 \\ x &= -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$f''\left(-\frac{a}{2}\right) = 2\mathrm{e}^2 > 0$$

liegt an der Stelle $x = -\dfrac{a}{2}$ ein lokales Minimum vor, der zugehörige Funktionswert ist $f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2\mathrm{e}^2}{4}$.

Alternativ (und einfacher) kann das Extremum anhand des Monotonieverhaltens ermittelt werden: Die Funktion ist *monoton wachsend* für $f_a'(x) \geq 0$ und fallend für $f_a'(x) \leq 0$. Da der Faktor $\mathrm{e}^{-a/x}$ stets positiv ist, genügt es, das Vorzeichen des Faktors $2x+a$ zu betrachten. Offensichtlich ist $2x + a \leq 0$ für $x \leq -\frac{a}{2}$ und $2x + a \geq 0$ für $x \geq -\frac{a}{2}$, d. h. f wechselt beim Durchgang durch die Stelle $x = -\frac{a}{2}$ das Monotonieverhalten von fallend zu wachsend, so dass dort ein Minimum vorliegt.

(c) Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{a}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{a}{x} = 0$ haben wir

$$\lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-a/x}}_{\to\mathrm{e}^0=1} = \infty.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{a}{x} = \infty$ (beachte $a > 0$) und somit $\lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{e}^{a/x} = \infty$ haben wir weiter

$$\lim_{x\to 0+} x^2\mathrm{e}^{-a/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{a/x}} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Da $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{a}{x} = -\infty$ und somit $\lim\limits_{x\to 0-} \mathrm{e}^{-a/x} = \infty$, ist schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} x^2\mathrm{e}^{-a/x} &= \lim_{x\to 0-} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-a/x}}{\frac{1}{x^2}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{\mathrm{e}^{-a/x}\cdot\frac{a}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x\to 0-} -\frac{a}{2}x\mathrm{e}^{-a/x} = \lim_{x\to 0-} -\frac{a}{2}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-a/x}}{\frac{1}{x}}}_{\frac{\infty}{\infty}} \\ &\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0-} -\frac{a}{2}\frac{\mathrm{e}^{-a/x}\cdot\frac{a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0-} \frac{a^2}{2}\mathrm{e}^{-a/x} = \infty. \end{aligned}$$

Aus den berechneten Grenzwerten, der Stetigkeit von f_a (die gewährleistet, dass im Wertebereich keine Zahlen „übersprungen“ werden) sowie der Tatsache, dass offensichtlich stets $f_a(x) > 0$ gilt, ergibt sich der Wertebereich $W_{f_a} = (0, \infty)$.

(d) Als Vorbetrachtung ermitteln wir zunächst mittels partieller Integration eine Stammfunktion von $\ln x$:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{part. Int.} \\ u=\ln x,\, v'=1 \\ u'=\frac{1}{x},\, v=x}}{=} x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \ln x - x \quad (+c).$$

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} \ln(f_a(x)) \,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}} \left(\ln(x^2) + \ln\left(\mathrm{e}^{-2/x}\right)\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(2 \ln x - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2(x \ln x - x)\Big|_1^{\mathrm{e}} - 2 \ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} = 2(0+1) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: **(9 P.)**

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \dfrac{5x^2+3}{x^4+x^2}$ und untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x) \,\mathrm{d}x$ existiert. Geben Sie gegebenenfalls dessen Wert an.

(b) Ermitteln Sie $\displaystyle\int (x^2+3) \sinh(x) \,\mathrm{d}x$ durch Anwendung geeigneter Integrationsmethoden bzw. Rückführung auf Grundintegrale.

Lösung:

(a) Die gegebene Funktion ist echt gebrochen rational (Zählergrad<Nennergrad), so dass wir das Integral direkt mit der Partialbruchzerlegung behandeln können. Wir benötigen dafür die Nullstellen des Nenners $x^4 + x^2 = x^2(x^2+1)$. Der Faktor x^2 hat die doppelte reelle Nullstelle 0. Der verbleibende quadratische Faktor x^2+1 ist offenbar immer positiv, hat also keine reellen Nullstellen. Der Ansatz für die PBZ lautet daher

$$f(x) = \frac{5x^2+3}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert nach Kürzen

$$5x^2 + 3 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2$$

Der Koeffizient B kann bereits durch Einsetzen der reellen Nullstelle $x = 0$ bestimmt werden, es ergibt sich $B = 3$. Einsetzen, Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich zur Bestimmung der verbleibenden Konstanten A, C, D:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3 &= Ax^3 + Ax + 3x^2 + 3 + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (A+C)x^3 + (D+3)x^2 + Ax + 3. \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten bei gleichen Potenzen:

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad 3 = 3 \text{ (ergibt nichts Neues, da } B = 3 \text{ bereits bestimmt wurde)} \\ x^1 &: \quad 0 = A \\ x^2 &: \quad 5 = D + 3 \Longrightarrow D = 2 \\ x^3 &: \quad 0 = A + C \Longrightarrow C = -A = 0. \end{aligned}$$

Einsetzen der PBZ und Bestimmung der Stammfunktion:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{3}{x} + 2\arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Es handelt sich in der Aufgabe um ein uneigentliches Integral mit einem unbeschränkten Integrationsintervall. Mit obiger Stammfunktion F gilt

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty}\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}(F(a) - F(1))\\ &= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{3}{a} + 2\arctan a - (-3 + 2\arctan 1)\right)\\ &= 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} + 3 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 3 + \frac{\pi}{2} \approx 4.57,\end{aligned}$$

das uneigentliche Integral konvergiert also.

(b) Mit zweimaliger partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \left(x^2+3\right)\sinh x\,\mathrm{d}x &\underset{\substack{u=x^2+3,\, v'=\sinh x\\ u'=2x,\, v=\cosh x}}{=} (x^2+3)\cosh x - 2\int x\cosh x\,\mathrm{d}x\\ &\underset{\substack{u=x,\, v'=\cosh x\\ u'=1,\, v=\sinh x}}{=} (x^2+3)\cosh x - 2\left(x\sinh x - \int \sinh x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= (x^2+3)\cosh x - 2x\sinh x + 2\cosh x + c\\ &= (x^2+5)\cosh x - 2x\sinh x + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$:

(8 P.)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & z & = & a\\ 2x & - & 4y & + & az & = & 4\\ x & + & y & + & 2z & = & -a\end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

(b) Wie muss man $a \in \mathbb{R}$ wählen, damit das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung besitzt?

(c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ unendlich viele Lösungen? Ermitteln Sie diese Lösungsmenge.

(d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung und für welche $a \in \mathbb{R}$ hat es keine Lösung?

Lösung:

(a) Da es sich um eine 3×3-Matrix handelt, kann die Determinante z. B. mittels der Regel von Sarrus berechnet werden:

$$\begin{aligned}\det A = {}&(-1)\cdot(-4)\cdot 2 \;+\; 2\cdot a\cdot 1 \;+\; 1\cdot 2\cdot 1\\ &- 1\cdot(-4)\cdot 1 \;-\; 1\cdot a\cdot(-1) \;-\; 2\cdot 2\cdot 2 = 6 + 3a = 3(a+2).\end{aligned}$$

(b) Das homogene lineare Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, d. h. wenn $\det A \neq 0$ gilt, somit also genau im Falle $a \neq -2$.

(c) Mittels Gauß-Algorithmus wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix in eine Form gebracht, in welcher Aussagen über die Lösbarkeit möglich sind.

$$
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{-1} & 2 & 1 & a \\
2 & -4 & a & 4 \\
1 & 1 & 2 & -a \\
\hline
0 & 0 & a+2 & 4+2a \\
0 & \boxed{3} & 3 & 0 \\
\hline
0 & 0 & a+2 & 4+2a
\end{array}
$$

Je nach dem Wert von a ergibt sich dann in der letzten Zeile noch ein Leitelement oder nicht, wodurch der Rang von A (sowie der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$) bestimmt wird. Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten besitzt unendlich viele Lösungen, wenn $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b}) < 3$ gilt, dies ist hier der Fall für $a = -2$ (dann sind beide Ränge gleich 2). Die Nichtleitunbekannte z wird dann als freier Parameter $z = t$ angesetzt. Auflösen der Leitgleichungen

$$
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{-1} & 2 & 1 & -2 \\
0 & \boxed{3} & 3 & 0
\end{array}
$$

von unten nach oben ergibt $y = -t$, $x = 2 - t$, also die allgemeine Lösung

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

(d) Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 3$ gilt. Bei einer 3×3-Matrix bedeutet dies gleichzeitig, dass $\det A \neq 0$ ist, d. h. $a \neq -2$ (vgl. Aufgabe (b)).

Der Fall, dass es keine Lösung gibt (dafür müsste $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|\vec{b})$ sein), kann hier nicht vorkommen, da beide Ränge höchstens gleich 3 sein können, $\operatorname{rang} A < 3$ nur im Falle $a = -2$ gilt und wir dann $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 2$ haben.

Zusatzaufgabe:
(3 Punkte)

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $f(x) = 1 - \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.

(a) Begründen Sie, dass die Fourierreihe von f eine reine Cosinusreihe ist, d. h. die Form $F_f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ hat.

(b) Berechnen Sie den Fourierkoeffizienten a_0.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $F_f(x)$ gegen $f(x)$? (Begründung!)

Lösung:

(a) Wegen

$$
f(-x) = 1 - \left|\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right| = 1 - \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = 1 - \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = f(x)
$$

für alle x ist die Funktion f gerade (symmetrisch zur y-Achse) und hat daher eine reine Cosinusreihe (den Summanden a_0 eingeschlossen) als Fourierreihe.

(b)

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right)\,\mathrm{d}x \quad \text{(Symmetrie)}\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\,\mathrm{d}x \qquad \left(\text{es gilt } \sin\left(\frac{x}{2}\right)\geq 0 \text{ für } 0\leq x\leq \pi\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(x+2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-0-2\cos 0\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi-2\right).
\end{aligned}
$$

(c) Weil f stückweise stetig differenzierbar und als Verkettung stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist die Summe der Fourierreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ gleich $f(x)$.