Studiengang:	**Matrikelnummer:**

1	2	3	4	5	6	Z	Bonus	Punkte	Note

Prüfungsklausur zum Modul
Höhere Mathematik für Ingenieure 1
18. 2. 2019, 13.00 - 16.00 Uhr

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, die vorgegebene *Tabelle von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln*, *Taschenrechner* (auch grafikfähig) aber **ohne** Computer-Algebra-System (CAS).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Das gilt insbesondere für auftretende Integrale, die durch Anwendung geeigneter Integrationsmethoden zu lösen sind. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: **(8 P.)**

(a) Welche komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ erfüllen *gleichzeitig* die Ungleichungen

$$|\overline{z} + 2\mathrm{i} - 2| \geq 2\sqrt{2} \quad \textit{und} \quad |-\mathrm{i}\overline{z} + 2| \leq |z - 2|?$$

Skizzieren Sie die Menge in der Gaußschen Zahlenebene.

(b) Ermitteln Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3 + 125 = 0$ und geben Sie diese in der algebraischen Form an.

Lösung:

(a) **Variante 1:**

Mit der Darstellung $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y reell) erhalten wir für die erste Ungleichung

$$|x - \mathrm{i}y + 2\mathrm{i} - 2| = |(x-2) + (-y+2)\mathrm{i}| \geq 2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (-y+2)^2} \geq 2\sqrt{2},$$

Quadrieren wir die Ungleichung in der letzten Zeile auf beiden Seiten (da beide Seiten nichtnegativ sind, ist dies hier eine äquivalente Umformung), folgt

$$(x-2)^2 + (-y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

Dies beschreibt *das Äußere* eines Kreises mit dem Radius $2\sqrt{2}$ und dem Mittelpunkt $(2, 2)$ einschließlich des Randes.

Die zweite Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned}
|-\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)+2| = |-\mathrm{i}x-y+2| &\le |x+\mathrm{i}y-2| \\
\sqrt{(-y+2)^2+(-x)^2} &\le \sqrt{(x-2)^2+y^2} \\
(-y+2)^2+(-x)^2 &\le (x-2)^2+y^2 \\
y^2-4y+4+x^2 &\le x^2-4x+4+y^2 \\
-4y &\le -4x \\
y &\ge x,
\end{aligned}$$

also alle Punkte *oberhalb* der Geraden $y = x$.

Variante 2:

Wir nutzen aus, dass $|z - z_0|$ den Abstand der Punkte z und z_0 in der komplexen Ebene beschreibt, sowie Rechenregeln wie $|zw| = |z| \cdot |w|$ (man beachte, dass Entsprechendes *nicht* für Summen gilt) und $|z| = |-z| = |\overline{z}|$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
|\overline{z}+2\mathrm{i}-2| &= |\overline{z}-(2-2\mathrm{i})| = |\overline{z}-\overline{(2+2\mathrm{i})}| \\
&= |\overline{z-(2+2\mathrm{i})}| = |z-(2+2\mathrm{i})| \ge 2\sqrt{2},
\end{aligned}$$

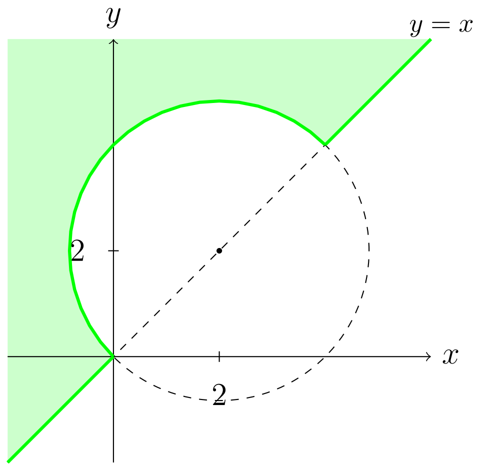
also die Menge aller Punkte z, deren Abstand von $2+2\mathrm{i}$ größer oder gleich $2\sqrt{2}$ ist.

Die linke Seite der anderen Ungleichung ist gleich

$$\begin{aligned}
|-\mathrm{i}\overline{z}+2| &= |-\mathrm{i}(\overline{z}+2\mathrm{i})| = |-\mathrm{i}| \cdot |\overline{z}+2\mathrm{i}| \\
&= |\overline{z}+2\mathrm{i}| = |\overline{z}-\overline{2\mathrm{i}}| = |\overline{z-2\mathrm{i}}| = |z-2\mathrm{i}|,
\end{aligned}$$

so dass diese Ungleichung lautet $|z-2\mathrm{i}| \le |z-2|$, d. h. der Abstand von z zu $2\mathrm{i}$ ist kleiner oder gleich dem Abstand von z zu 2. Nun hat z genau dann den gleichen Abstand zu den Zahlen $2\mathrm{i}$ und 2, wenn es auf der Mittelsenkrechten der Strecke zwischen beiden Zahlen liegt – d. h. auf der Geraden $y = x$. Die z, die näher an $2\mathrm{i}$ als an 2 liegen, bilden dann die Halbebene *oberhalb* dieser Geraden.

Insgesamt ergibt sich das folgende Bild. (Die gesuchte Punktmenge (grün) ist natürlich unbeschränkt, so dass hier nur ein Teil gezeichnet werden kann. Der Rand gehört mit zur Menge.)



(b) Um das Problem auf eine reine Gleichung der Form $w^n = a$ zurückführen zu können, substituieren wir $w = z + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, so dass wir $w^3 = -125$ lösen müssen. Wir stellen die rechte Seite in exponentieller Form dar: Da $|-125| = 125$ und $\arg(-125) = \pi$, haben wir die Gleichung

$$w^3 = 125\,\mathrm{e}^{(\pi+2k\pi)\mathrm{i}}$$

mit den drei Lösungen

$$w_k = \sqrt[3]{125}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)} = 5\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

In algebraischer Form erhalten wir folgende Lösungen w_k und nach der Rücksubstitution $z_k = w_k - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ die dazugehörigen Lösungen z_k der Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} &&= 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) &&= 5\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right) &&\Longrightarrow z_0 = \frac{5}{2} + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i},\\
w_1 &= 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} &&= 5\left(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi\right) &&= -5 &&\Longrightarrow z_1 = -5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\\
w_2 &= 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} &&= 5\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) &&= 5\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right) &&\Longrightarrow z_2 = \frac{5}{2} - 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:
(7 P.)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}, \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}, \qquad \text{(iii)}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{(2k)}}{3^{(k^2)}}.$$

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$.

Hinweis: Für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ gilt $0 \le \sin(x) \le x$.

Lösung:

(a) (i) Für die Reihenglieder $a_k = \dfrac{k}{2k+1}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} = \dfrac{1}{2} \neq 0$. Die Glieder der Reihe bilden also keine Nullfolge. Damit ist das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt, die Reihe divergiert also.

(ii) Anwendung des Quotientenkriteriums (ähnlich ginge auch das Wurzelkriterium) liefert

$$q = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

damit ist die Reihe konvergent.

(iii) Auch hier bietet sich das Quotientenkriterium an. Es gilt

$$\begin{aligned}
q = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k+2}}{3^{(k+1)^2}} \cdot \frac{3^{k^2}}{2^{2k}}\\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{2^2}{3^{(k+1)^2-k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{3^{2k+1}} = 0 < 1,
\end{aligned}$$

so dass auch hier Konvergenz vorliegt.

(b) Der gegebene Hinweis deutet auf das Vergleichskriterium (Majorantenkriterium) hin: Für genügend große k (genauer gesagt $k \geq \frac{2}{\pi}$) gilt $0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{\pi}{2}$ und damit aufgrund des Hinweises $0 \leq \sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

Für die Reihenglieder a_k gilt damit für genügend große k die Abschätzung

$$0 \leq a_k = \sin^2\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert bekanntlich und stellt daher eine konvergente Majorante für die zu untersuchende Reihe dar, diese konvergiert somit ebenfalls.

Aufgabe 3: **(8 P.)** Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \frac{2 + \ln(x-a)}{a-x}$. Dabei sei $a \in \mathbb{R}$ ein fester Parameter.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion.

(b) Ermitteln Sie, wo die Funktion monoton wächst bzw. monoton fällt, geben Sie die Monotonieintervalle an und bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte.

(c) Berechnen Sie die Grenzwerte von $f_a(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to a+$ und geben Sie anschließend den Wertebereich von $f_a(x)$ an.

Lösung:

(a) $D_{f_a} = (a, \infty)$, da wegen der Anwendung des Logarithmus $x - a > 0$ sein muss. Durch diese Bedingung ist auch schon gewährleistet, dass der Nenner nicht 0 wird.

Nullstelle: Wir setzen den Zähler Null:

$$\begin{aligned} 2 + \ln(x-a) &= 0 \\ \ln(x-a) &= -2 \\ x - a &= \mathrm{e}^{-2} \\ x &= a + \mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$f_a'(x) = \frac{\overbrace{\frac{1}{x-a}(a-x)}^{=-1} + 2 + \ln(x-a)}{(a-x)^2} = \frac{1 + \ln(x-a)}{(x-a)^2}.$$

Die Funktion ist *monoton wachsend* für $f_a'(x) \geq 0$. Da der Nenner $(x-a)^2$ stets positiv ist, genügt es, das Vorzeichen des Zählers von $f_a'(x)$ zu untersuchen:

$$\begin{aligned} 1 + \ln(x-a) &\geq 0 \\ \ln(x-a) &\geq -1 \\ x - a &\geq \frac{1}{\mathrm{e}} \\ x &\geq a + \frac{1}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

(Man beachte, dass die auf beiden Seiten angewandte e-Funktion monoton wachsend ist, so dass das $\geq$-Zeichen erhalten bleibt.)

Damit ist f_a im Intervall $\left[a + \frac{1}{\mathrm{e}}, \infty\right)$ *monoton wachsend.*

Analog ist $f_a'(x) \leq 0$ und damit f_a *monoton fallend* im Intervall $\left(a, a + \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ (man beachte den Definitionsbereich).

Aus der Monotonie ergibt sich sofort, dass an der Stelle $x = a + \mathrm{e}^{-1}$ mit dem Funktionswert $f\left(a + \mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}$ ein lokales Minimum als einziges lokales Extremum vorliegt.

(c) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2 + \ln(x-a)}{a-x}}_{-\frac{\infty}{\infty}} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-a}}{-1} = 0.$$

sowie

$$\lim_{x\to a+} f_a(x) = \lim_{x\to a+} \frac{1}{a-x} \cdot \lim_{x\to a+} (2 + \ln(x-a)) = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty.$$

Aus den berechneten Grenzwerten, der Monotonie sowie dem lokalen Minimum mit dem Funktionswert $-\mathrm{e}$ ergibt sich der Wertebereich $W_{f_a} = [-\mathrm{e}, \infty)$.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x + 2}{(x^2-1)(4x^2+1)}$.

(8 P.)

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

(b) Untersuchen Sie die Existenz des Integrals $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ und berechnen Sie gegebenenfalls dessen Wert.

Lösung:

(a) Die gegebene Funktion ist echt gebrochen rational (Zählergrad<Nennergrad), so dass wir das Integral direkt mit der Partialbruchzerlegung behandeln können. Wir benötigen dafür die Nullstellen des Nenners. Der Faktor $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ im Nenner hat die beiden einfachen reellen Nullstellen 1 und -1. Der verbleibende quadratische Faktor $4x^2 + 1$ ist offenbar immer positiv, hat also keine reellen Nullstellen. Der Ansatz für die PBZ lautet daher

$$f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + x + 2}{(x+1)(x-1)(4x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{4x^2+1}$$

Multiplizieren mit dem Nenner liefert nach Kürzen

$$\begin{aligned} &4x^3 - 2x^2 + x + 2 \\ &= A(x-1)(4x^2+1) + B(x+1)(4x^2+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Einige der Koeffizienten können durch Einsetzen der reellen Nullstellen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x = -1: &\quad -5 = -10A \iff A = \frac{1}{2}, \\ x = 1 \;\;: &\quad \;\;\;5 = 10B \;\;\;\iff B = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen der berechneten Koeffizienten:

$$4x^3-2x^2+x+2=\frac{1}{2}(x-1)(4x^2+1)+\frac{1}{2}(x+1)(4x^2-1)+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich zur Bestimmung der verbleibenden Konstanten C, D:

$$\begin{aligned}
4x^3-2x^2+x+2 &= x(4x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)\\
4x^3-2x^2+x+2 &= 4x^3+x+Cx^3-Cx+Dx^2-D\\
-2x^2+2 &= Cx^3+Dx^2-Cx-D.
\end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten bei gleichen Potenzen ergibt $C=0,\ D=-2$.

(Alternativ könnte man C und D auch durch Einsetzen weiterer Punkte bestimmen.)

Bestimmung der Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
F(x)=\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-2\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+1}\\
&= \frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|-2\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+1}\\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-1|-2\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+1}\\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-1|-\arctan(2x)+c,\quad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Das Teilintegral $2\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+1}$ kann man einfach als Spezialfall von $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$ anhand des Formelblatts Grundintegrale bestimmen oder mittels der Substitution $t=2x,\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$ in $\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\arctan(t)$ überführen.

(b) Der Nenner von $f(x)$ ist Null genau dann, wenn $x=\pm1$. Der Zähler von $f(x)$ ist in diesen Fällen nicht Null, was auf Polstellen in $x=\pm1$ schließen lässt. Es handelt sich daher um ein uneigentliches Integral mit einem in einer Umgebung der unteren Integrationsgrenze 1 unbeschränkten Integranden. Mit obiger Stammfunktion F gilt

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to1+}\int_x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to1+}(F(2)-F(x))=\infty,$$

da $\lim\limits_{x\to1+}\frac{1}{2}\ln|x^2-1|=-\infty$ gilt und alle anderen Summanden beschränkt bleiben. Das uneigentliche Integral ist also divergent.

Aufgabe 5: **(8 P.)** Die von einem Parameter $\alpha\in\mathbb{R}$ abhängige Matrix $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ sowie der von einem Parameter $\beta\in\mathbb{R}$ abhängige Vektor $\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$A=\begin{pmatrix}2&2&4\\-3&\alpha-3&0\\0&-1&3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\\beta\end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Parameterwerte von α,β besitzt das lineare Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{b}$

(i) genau eine Lösung, (ii) keine Lösung, (iii) unendliche viele Lösungen?

(b) Für welche Werte des Parameters α bilden die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Systems im Fall $\alpha = -2$, $\beta = -\dfrac{1}{4}$.

(d) Für welche Werte des Parameters α ist das Volumen des von den Spalten von A aufgespannten Spats gleich 6 Volumeneinheiten?

Lösung:

(a) Mittels Gauß-Algorithmus wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix in eine Form gebracht, in welcher Aussagen über die Lösbarkeit möglich sind.

$$\begin{array}{ccc|c}
\boxed{2} & 2 & 4 & 1 \\
-3 & \alpha-3 & 0 & -2 \\
0 & -1 & 3 & \beta \\
\hline
0 & \alpha & 6 & -\frac{1}{2} \\
0 & -1 & \boxed{3} & \beta \\
\hline
0 & \alpha+2 & 0 & -\frac{1}{2}-2\beta
\end{array}$$

Anhand der letzten Zeile sind nun folgende Aussagen über die Lösbarkeit möglich:

(i) keine Lösungen: $\alpha = -2$, $\beta \neq -\frac{1}{4}$ (dann ist $2 = \operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 3$)

(ii) genau eine Lösung: $\alpha \neq -2$ ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 3 =$Anzahl Unbek.)

(iii) unendlich viele Lösungen: $\alpha = -2$, $\beta = -\frac{1}{4}$ ($\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 2$).

(b) Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ bilden genau dann eine Basis dieses Raumes, wenn sie linear unabhängig sind. Dies gilt genau dann, wenn der Rang der von ihnen gebildeten Matrix gleich 3 ist, d. h. in diesem Falle, dass $\alpha \neq -2$ ist.

(c) In diesem Falle ist das System lösbar, aber der Rang der Matrix A kleiner als die Anzahl der Unbekannten und die Lösung daher nicht eindeutig. Die Nichtleitunbekannte x_2 wird als freier Parameter $x_2 = t$ angesetzt. Auflösen der Leitgleichungen

$$\begin{array}{ccc|c}
\boxed{2} & 2 & 4 & 1 \\
0 & -1 & \boxed{3} & -\frac{1}{4}
\end{array}$$

von unten nach oben ergibt $x_3 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3}t$, $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}t$, also die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ -1/12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(d) Das Volumen ist gleich dem Betrag von $\det A$, wir haben also

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right| = |2 \cdot (\alpha+2) \cdot 3| = 6|\alpha+2| \stackrel{!}{=} 6$$

zu lösen (hier wurde der einfacheren Rechnung halber die Gestalt der Matrix nach dem obigen ersten Gauß-Schritt verwendet, da dieser die Determinante nicht verändert). Dies führt zu $|\alpha+2| = 1$ bzw. $\alpha + 2 = \pm 1$ mit den beiden Lösungen $\alpha = -1$ und $\alpha = -3$.

Aufgabe 6: Es sei $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ und 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.
(6 P.)

(a) Skizzieren Sie $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$.

(b) Weisen Sie mittels zweifacher partieller Integration nach, dass gilt

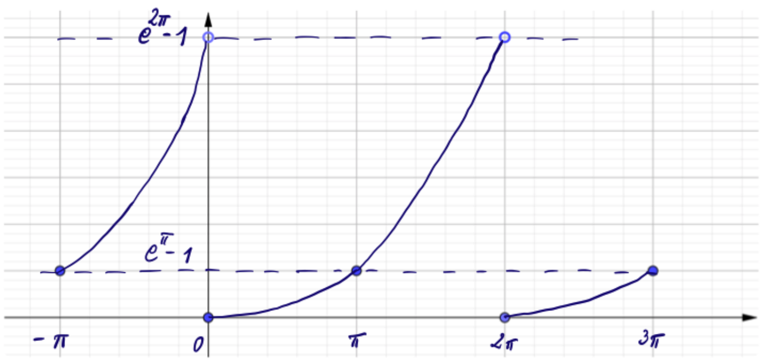
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k}{1+k^2}(1-\mathrm{e}^{2\pi}), \quad k \geq 1.$$

(c) Bestimmen Sie mittels des Ergebnisses von (b) die Fourierkoeffizienten b_k in der Fourierreihe $F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ der Funktion $f(x)$.

(d) Welche Werte nimmt die Fourierreihe $F_f(x)$ an der Stelle $x_1 = \pi$ bzw. $x_2 = 2\pi$ an?

Lösung:

(a) Nicht maßstäbliche Skizze:



(b) **Variante 1:**
1. Partielle Integration: $u'(x) = \mathrm{e}^x = u(x), v(x) = \sin(kx), v' = k\cos(kx)$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x\ \sin(kx)\ \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \sin(kx)\Big|_0^{2\pi} - k\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{2\pi}\sin(2k\pi) - \mathrm{e}^0\sin(0) - k\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi}(-k)\mathrm{e}^x\cos(kx)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

weil $\sin(2k\pi) = \sin(0) = 0$.
2. Partielle integration: $u' = -k\,\mathrm{e}^x = u(x), v(x) = \cos(kx), v'(x) = -k\sin(kx)$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x\ \sin(kx)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}(-k)\mathrm{e}^x\cos(kx)\,\mathrm{d}x = -k\mathrm{e}^x\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} \\ &\quad - \int_0^{2\pi}(-k\mathrm{e}^x)(-k\sin(kx))\,\mathrm{d}x \\ &= -k\mathrm{e}^{2\pi}\cos(2k\pi) + k\mathrm{e}^0\cos(0) - k^2\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= k(1-\mathrm{e}^{2\pi}) - k^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\sin(kx)\,\mathrm{d}x}_{\text{Ausgangsintegral}},\end{aligned}$$

weil $\cos(2k\pi) = \cos(0) = 1$. Die letzte Zeile ist äquivalent zu:

$$(1+k^2)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x = k(1-\mathrm{e}^{2\pi}) \iff \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k}{1+k^2}(1-\mathrm{e}^{2\pi}).$$

Variante 2:
1. Partielle Integration: $u'(x) = \sin(kx), u(x) = -\frac{1}{k}\cos(kx), v(x) = \mathrm{e}^x = v'(x)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x\ \sin(kx)\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{k}\cos(kx)\mathrm{e}^x\Big|_0^{2\pi} - \left(-\frac{1}{k}\right)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}(\cos(2k\pi)\mathrm{e}^{2\pi} - \cos(0)\mathrm{e}^0) + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos(kx)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

weil $\cos(2k\pi) = \cos(0) = 1$.
2. Partielle integration: $u'(x) = \cos(kx), u(x) = \frac{1}{k}\sin(kx), v(x) = \frac{1}{k}\,\mathrm{e}^x = v'(x)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x\ \sin(kx)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) + \frac{1}{k}\mathrm{e}^x\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{k}\mathrm{e}^x\frac{1}{k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) + \frac{1}{k^2}(\mathrm{e}^{2\pi}\sin(2k\pi) - \mathrm{e}^0\sin(0)) \\
&\quad - \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) - \frac{1}{k^2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x,}_{\text{Ausgangsintegral}}
\end{aligned}$$

weil $\sin(2k\pi) = \sin(0) = 0$. Die letzte Zeile ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) \\
\iff \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}}(1-\mathrm{e}^{2\pi}) &= \frac{k}{1+k^2}(1-\mathrm{e}^{2\pi}),
\end{aligned}$$

weil

$$\frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k}\cdot\left(\frac{k^2}{1+k^2}\right) = \frac{k}{1+k^2}.$$

(c) Die Fourierkoeffizienten b_k sind gleich

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\mathrm{e}^x - 1)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad (1) \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{k}{(1+k^2)}(1-\mathrm{e}^{2\pi}), \qquad (2)
\end{aligned}$$

Dabei gilt (**??**) wegen

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{k}(\cos(2k\pi) - \cos(0)) = 0$$

und (**??**) wegen Teilaufgabe (b).

(d) Weil $f(x)$ in $x_1 = \pi$ stetig ist, gilt

$$\mathcal{F}_f(\pi) = f(\pi) = \mathrm{e}^{\pi} - 1,$$

dagegen besitzt $f(x)$ in $x_2 = 2\pi$ eine Sprungstelle (ist unstetig) und es gilt deshalb

$$\mathcal{F}_f(\pi) = \frac{1}{2}(f(2\pi - 0) + f(2\pi + 0)) = \frac{1}{2}((\mathrm{e}^{2\pi} - 1) + 0) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{2}.$$

Zusatz-aufgabe:
(3 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$.

Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$, gegen die die Reihe auf ihrem Konvergenzintervall $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ konvergiert. Verwenden Sie hierzu gliedweise Differentiation bzw. Integration.

Lösung:

Durch gliedweises Differenzieren erhalten wir unter Verwendung der Formel für die Summe einer geometrischen Reihe

$$R'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - (-\frac{x^2}{3})} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}}.$$

Um einen Ausdruck für die ursprüngliche Funktion $R(x)$ zu finden, müssen wir $R'(x)$ wieder integrieren und erhalten

$$R(x) = \int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

(Spezialfall von $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x$ vom Formelblatt Grundintegrale, da der Nenner keine reellen Nullstellen hat, oder Substitution $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$, vgl. Schluss von Aufgabe 4.(a)), zur Bestimmung der Integrationskonstanten c setzen wir einen Wert ein, z. B. $x = 0$, und erhalten

$$R(0) = 0 = \sqrt{3}\arctan\left(\frac{0}{\sqrt{3}}\right) + c = 0 + c,$$

also $c = 0$.