Studiengang:				**Matrikelnummer:**			**Anz. beschriebene Seiten:**		
1	2	3	4	5	6	Z	Bonus	Punkte	Note

Prüfungsklausur zum Modul
Höhere Mathematik für Ingenieure 1

22. 2. 2021

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, das vorgegebene *Formelblatt von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln, zugelassene wissenschaftl. Taschenrechner* (**kein** GTR, **kein** Computer-Algebra-System (CAS)).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: **(5 P.)**

(a) Bestimmen Sie die Folgengrenzwerte

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\sqrt{4n^4+n^3}} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n}{2+\frac{1}{n}}}\,.$$

(b) Untersuchen Sie, für welche reellen p die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{p}{2}\right)^n$ konvergiert.

Ermitteln Sie die Summe der Reihe für den Fall $p=1$.

Lösung:

(a) (i) Der Ausdruck ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$, es empfiehlt sich also, mit dem größtmöglichen Teilausdruck zu kürzen. Wir klammern unter der Wurzel im Nenner n^4 aus, aus dem *Faktor* n^4 können wir dann einzeln die Wurzel ziehen und das entstehende n^2 mit dem Zähler kürzen (es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass bei einer Wurzel aus einer *Summe* die Wurzel *nicht* einzeln aus den Summanden gezogen werden kann):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\sqrt{4n^4+n^3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\sqrt{n^4\left(4+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2\sqrt{4+\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}} = \frac{4}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2.
\end{aligned}$$

Dabei wurden in der zweiten Zeile die Rechenregeln für Grenzwerte von Quotienten und in der dritten die Stetigkeit der Wurzelfunktion benutzt.

Alternativ könnte man auch den Zähler quadriert mit unter die Wurzel nehmen und alles unter der Wurzel kürzen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{\sqrt{4n^4+n^3}} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{16n^4}{n^4\left(4+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{16}{4+\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{16}{4+\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2.\end{aligned}$$

(ii) Wir führen das Problem auf die bekannten Grenzwerte (siehe Formelblatt) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für eine *(endliche!) Konstante* $a > 0$ zurück.

Man kann jedoch nicht einfach mit dem letztgenannten Grenzwert argumentieren und sagen, es gilt $\frac{3n}{2+\frac{1}{n}} > 0$, also geht die n-te Wurzel daraus gegen 1. Der Ausdruck unter der Wurzel geht nämlich gegen ∞, und die n-te Wurzel daraus ergibt für $n \to \infty$ den *unbestimmten Ausdruck* $\infty^{1/\infty} = \infty^0$. Wir haben

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n}{2+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1.$$

Dabei ergibt sich der Grenzwert im Nenner als

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 2^0 = 1,$$

denn hier kann man nach den Rechenregeln für Grenzwerte in Basis und Exponent einzeln zum Grenzwert übergehen, da kein unbestimmter Ausdruck vorliegt.

(b) Es liegt eine *geometrische Reihe* der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ mit $q = 1 - \frac{p}{2}$ vor. Bekanntlich konvergiert diese *genau dann*, wenn $|q| = \left|1 - \frac{p}{2}\right| < 1$ gilt.

(Wenn Sie die Reihe nur mit dem Wurzelkriterium untersuchen, erhalten Sie auch die Bedingung $\left|1 - \frac{p}{2}\right| < 1$ für Konvergenz und $\left|1 - \frac{p}{2}\right| > 1$ für Divergenz. Im Unterschied zur direkten Argumentation mit der geometrischen Reihe müssen Sie dann aber die Fälle mit $\left|1 - \frac{p}{2}\right| = 1$ gesondert betrachten.)

Die Bedingung $\left|1 - \frac{p}{2}\right| < 1$ ist äquivalent zu dem Ungleichungspaar

$$\begin{aligned} -1 &< 1 - \frac{p}{2}, & 1 - \frac{p}{2} &< 1 \\ -2 &< -\frac{p}{2}, & -\frac{p}{2} &< 0 \\ 4 &> p, & p &> 0. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert also genau dann, wenn $0 < p < 4$ gilt.

Im Falle $p = 1$ erhalten wir mittels der bekannten Summenformel der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x(a-x)}$ mit einem festen Parameter $a \in \mathbb{R}$.
(10 P.)

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion und die Schnittpunkte $S(x_S, y_S)$ mit den Koordinatenachsen (in Abhängigkeit von a).

(b) Berechnen Sie, wo die Funktion monoton wächst bzw. monoton fällt und geben Sie die Monotonieintervalle an.

(c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte.

(d) Berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ sowie die einseitigen Grenzwerte $x \to a+$ und $x \to a-$. Geben Sie anschließend den Wertebereich W_{f_a} an.

(e) Skizzieren Sie $f_1(x)$ für $-2 \leq x \leq 3$ unter Verwendung der Ergebnisse von (a)-(d) (Skizze unter ausschließlicher Verwendung einer Wertetabelle wird nicht bewertet).

Lösung:

(a) Die einzige Einschränkung des Definitionsbereichs ist, dass der Nenner nicht 0 werden darf, was bei $x = a$ der Fall wäre, also ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq a\}$.

Der Zähler und somit die Funktion $f_a(x)$ wird nirgends 0, so dass es keinen Schnittpunkt mit der x-Achse gibt

Der Schnittpunkt mit der y-Achse im Falle $a \neq 0$ ist $(0, f_a(0)) = \left(0, \frac{2}{a}\right)$ (für $a = 0$ existiert dieser ebenfalls nicht).

(b) Um $f_a(x)$ abzuleiten, schreiben wir es am besten in der Form $f_a(x) = 2\mathrm{e}^{-x}(a-x)^{-1}$ und leiten dies nach der Produktregel ab. Es ergibt sich

$$f_a'(x) = -2\mathrm{e}^{-x}(a-x)^{-1} + 2\mathrm{e}^{-x}(a-x)^{-2} = \frac{-2}{\mathrm{e}^x(a-x)} + \frac{2}{\mathrm{e}^x(a-x)^2}$$
$$= 2\,\frac{-(a-x)+1}{\mathrm{e}^x(a-x)^2} = 2\,\frac{x+1-a}{\mathrm{e}^x(a-x)^2}$$

Man könnte auch nach der Quotientenregel die Ableitung erhalten:

$$f_a'(x) = \frac{0 - 2\big(\mathrm{e}^x(a-x)\big)'}{\big(\mathrm{e}^x(a-x)\big)^2} = -2\,\frac{\mathrm{e}^x(a-x) - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}(a-x)^2} = 2\,\frac{x+1-a}{\mathrm{e}^x(a-x)^2}.$$

Ableiten nach der Kettenregel (äußere Funktion $\frac{1}{x}$, innere Fkt. der Nenner) läuft schließlich praktisch auf dieselbe Rechnung hinaus.

Für die Monotonie müssen wir das Vorzeichen von $f_a(x)$ untersuchen. Da der Nenner stets positiv ist, genügt es, das Vorzeichen des Zählers (auch ohne den

Faktor 2) zu betrachten. Die Funktion ist *monoton wachsend* für $f_a'(x) \geq 0$, also im Falle

$$\begin{aligned} x + 1 - a &\geq 0 \\ x &\geq a - 1, \end{aligned}$$

analog ist sie *monoton fallend* für $f_a'(x) \leq 0$, also $x \leq a - 1$.

Die Monotonieintervalle sind aufgrund des Definitionsbereichs also $(-\infty, a-1)$ (monotones Fallen) und $(a-1, a)$ sowie (a, ∞) (monotones Wachsen).

(c) Wegen des oben bestimmten Monotonieverhaltens liegt als einziges Extremum ein lokales Minimum bei $x = a - 1$ mit dem Funktionswert $f_a(a-1) = \frac{2}{\mathrm{e}^{a-1}} = 2\mathrm{e}^{1-a}$ vor.

(d) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\to\infty} \underbrace{(a-x)}_{\to-\infty}} = 0$$

sowie

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\to 0} \underbrace{(a-x)}_{\to\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\overbrace{\mathrm{e}^{-x}}^{\to\infty}}{\underbrace{(a-x)}_{\to\infty}} \underset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-2\mathrm{e}^{-x}}{-1} = \infty.$$

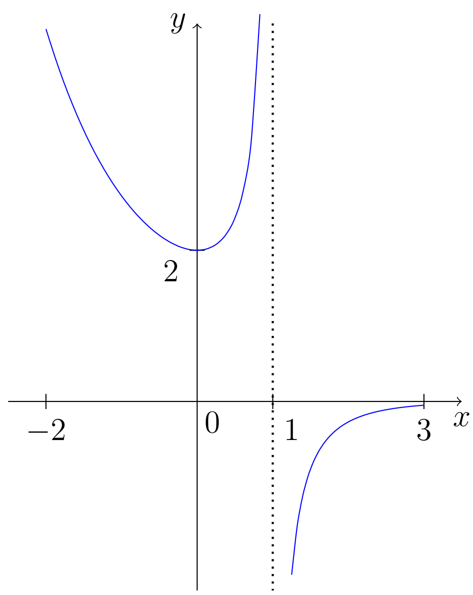
Da die e-Funktion stets positiv ist, haben wir

$$\lim_{x\to a+} \frac{2}{\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\to \mathrm{e}^a} \underbrace{(a-x)}_{\to 0-}} = -\infty, \qquad \lim_{x\to a-} \frac{2}{\underbrace{\mathrm{e}^x}_{\to \mathrm{e}^a} \underbrace{(a-x)}_{\to 0+}} = \infty.$$

Bei $x = a$ liegt also eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor.

Aus Extrema, Monotonie und Grenzwertverhalten ergibt sich schließlich der Wertebereich $W_f = (-\infty, 0) \cup [2\mathrm{e}^{1-a}, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [0, 2\mathrm{e}^{1-a})$.

(e)



Aufgabe 3: (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl $z = \dfrac{5\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}}}{\mathrm{i}+2}$.
(8 P.)

(b) Bestimmen Sie z^6 für $z = \sqrt{2}\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{i} - 1\right)$ unter Verwendung der Formel von Moivre und geben Sie das Ergebnis in algebraischer Form an.

(c) Für welche komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ gelten gleichzeitig die beiden folgenden Bedingungen? Skizzieren Sie den Bereich in der Gauß'schen Zahlenebene.

$$|2z - \mathrm{i}| < 4 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Re}(z) + 2\,\mathrm{Im}(z) \geq 1$$

Lösung:

(a) Wir haben $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}} = \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = \mathrm{i}$, somit

$$z = \frac{5\,\mathrm{i}^2}{\mathrm{i}+2} = -\frac{5}{\mathrm{i}+2} = -\frac{5(2-\mathrm{i})}{1^2+2^2} = -2 + \mathrm{i},$$

also ist $\mathrm{Re}\,z = -2$ und $\mathrm{Im}\,z = 1$.

(b) **1. Variante:** Um die Formel von Moivre verwenden zu können, wandeln wir zunächst die Zahl $w = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{i} - 1$ in die exponentielle Form $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ um.

Es ist $r = |w| = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Weiter ist $\tan\varphi = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Es gilt $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$, da w jedoch im 2. Quadranten liegt, ist $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$.

Damit haben wir $w = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$ und folglich

$$z^6 = \left(\sqrt{2}\,\mathrm{i} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^6 = \frac{2^3 \cdot 2^6}{3^3} \cdot \underbrace{\mathrm{i}^6}_{=-1} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{5\pi i}}_{=-1} = \frac{2^9}{3^3} = \frac{512}{27}.$$

2. Variante: Alternativ kann man auch den Ausdruck für z erst ausmultiplizieren und erhält $z = -\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$, Umwandlung in die exponentielle Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ergibt dann $r = |z| = \sqrt{\frac{2}{3} + 2} = \sqrt{\frac{8}{3}}$ und $\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{3}$. Es gilt $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$, da z jedoch im 3. Quadranten liegt, ist $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$. Somit ist

$$z^6 = \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^6 = \frac{8^3}{3^3} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{8\pi i}}_{=1} = \frac{2^9}{3^3} = \frac{512}{27}.$$

(c) Die erste Ungleichung schreiben wir

$$|2z - \mathrm{i}| = \left|2\left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\right| = 2\left|z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right| < 4$$
$$\left|z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right| < 2.$$

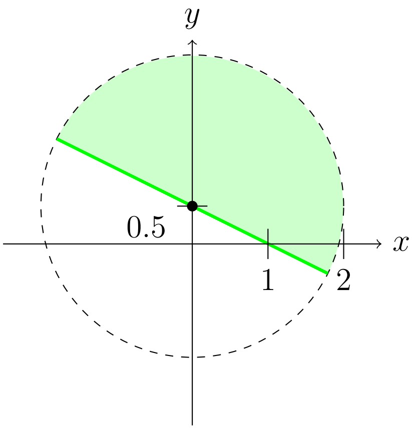
Dies beschreibt *das Innere* eines Kreises (ohne Rand) um den Punkt $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ mit dem Radius 2.

Für die zweite Ungleichung ergibt sich mit der Darstellung $z = x + iy$ (x, y reell):

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 1 \\ y &\geq \frac{1}{2} - \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

d. h. die Halbebene (einschließlich Rand) oberhalb der Geraden $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$.

Insgesamt ergibt sich das folgende Bild:



Aufgabe 4: **(8 P.)**

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $h(x) = \dfrac{4x^2 - 7x + 14}{(x-4)(x^2 - 3x - 4)}$.

(b) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$ und $g(x) = \dfrac{-5}{x^2+1}$ zwischen den Stellen $x = -1$ und $x = 1$.

(c) Untersuchen Sie, ob für $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$ das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert und geben Sie gegebenenfalls dessen Wert an.

Lösung:

(a) Da es sich beim Integranden um eine echt gebrochen rationale Funktion handelt, führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch.

1. Schritt: Bestimmung der Nullstellen des Nenners $q(x) = (x-4)(x^2 - 3x - 4)$. Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist, deshalb ist $x = 4$ eine Nullstelle, weitere Nullstellen sind Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

2. Schritt: Ansatz gemäß der Art und Anzahl der Nullstellen: $x_1 = 4$ ist eine doppelte reelle Nullstelle und $x_2 = -1$ eine einfache reelle Nullstelle. Damit ergibt sich der Ansatz:

$$\frac{4x^2 - 7x + 14}{(x-4)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}.$$

3. Schritt: Bestimmung der unbekannten Konstanten A, B, C. Multiplikation mit dem Nenner $q(x) = (x+1)(x-4)^2$ ergibt

$$4x^2 - 7x + 14 = A(x-4)^2 + B(x-4)(x+1) + C(x+1).$$

Einsetzmethode: Als erstes setzen wir die Nullstellen des Nenners ein:

$$\begin{aligned} x=-1: &\quad 4\cdot(-1)^1-7\cdot(-1)+14=25=A\cdot(-1-4)^2=25A \Leftrightarrow A=1,\\ x=4\ : &\quad 4\cdot 4^2-7\cdot 4+14=50=C(4+1)=5C \Leftrightarrow C=10. \end{aligned}$$

Da es keine weiteren Nullstellen gibt, setzen wir eine weitere geeignete Zahl ein – z. B. $x=0$ – und setzen außerdem die bereits bestimmten Konstanten ein:

$$x=0: \quad 14=(-4)^2\cdot 1+B(-4)+10=-4B+26 \iff B=3.$$

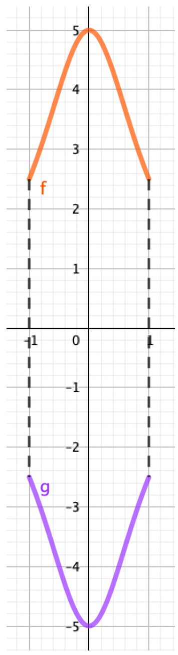
Damit kann nun das Integral berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2-7x+14}{(x-4)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{3}{x-4}\,\mathrm{d}x+\int\frac{10}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln|x+1|+3\ln|x-4|-\frac{10}{x-4}+C, \quad C\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Der Flächeninhalt F des Bereichs berechnet sich mit $f(x)=\frac{5}{1+x^2}>0$ (obere Grenze) und $g(x)=-f(x)<0$ (untere Grenze) gemäß

$$\begin{aligned} F &= \int_{-1}^{1}\big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{x^2+1}-\left(-\frac{5}{x^2+1}\right)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{10}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 10\,\arctan(x)\Big|_{-1}^{1}\\ &= 10(\arctan(1)-\arctan(-1))\\ &= 10\cdot 2\arctan(1)=\frac{20\cdot\pi}{4}=5\pi. \end{aligned}$$

(Weil $\arctan(x)$ eine ungerade Funktion ist, gilt $-\arctan(-x)=\arctan(x)$.)



(c) Das uneigentliche Integral berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{A\to\infty}\int_1^A\frac{5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to\infty}\left(5\arctan(x)\Big|_1^A\right)\\ &= 5\lim_{A\to\infty}\big(\arctan(A)-\arctan(1)\big)\\ &= 5\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: **(7 P.)**

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 3 und die Taylorreihe der Funktion $f(x)=\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}$ mit dem Entwicklungspunkt $x_0=0$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{3}{2}\right)^n}{(2n-1)\,6^n}$.

Lösung:

(a) Der einfachste Weg die Aufgabe zu lösen besteht darin, zu sehen, dass es eine geometrische Reihe mit $q = \frac{x}{3}$ ist:

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \ldots .$$

Wenn man das nicht gesehen hat, wären zunächst die Ableitungen zu bestimmen:

$f(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$	$f(0) = 1$	$\frac{f(0)}{0!} = 1,$
$f'(x) = -\frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$	$f'(x) = \frac{1}{3}$	$\frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{3}$
$f''(x) = -\frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^3} = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^2}$	$f''(0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{f''(0)}{2!} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$f'''(x) = \frac{-2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^4} = \frac{2\cdot 3\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^4}$	$f'''(0) = 3!\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\frac{f''(0)}{3!} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$
$f^{(n)}(x) = \frac{-2\cdot 3\cdots n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(-\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{n+1}} = \frac{n!\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{3}\right)^{n+1}}$	$f^{(n)}(0) = n!\,\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Damit ist das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$(T_3 f)(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27}$$

und die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \ldots .$$

(b) Die gegebene Reihe, die man in der Form $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n-1)6^n}\left(x - \frac{3}{2}\right)^n$ schreiben kann, ist eine Potenzreihe mit dem Zentrum $x_0 = \frac{3}{2}$ und den Koeffizienten $a_n = \frac{2^n}{(2n-1)6^n}$. Der Konvergenzbereich hat daher die Form eines Intervalls im Abstand des Konvergenzradius um das Zentrum herum. Zur Untersuchung gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Variante: Formale Betrachtung als „Zahlenreihe“ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$b_n = \frac{2^n\left(x-\frac{3}{2}\right)^n}{(2n-1)6^n} = \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^n}{(2n-1)3^n}$$

und damit

$$b_{n+1} = \frac{2^{n+1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{(2(n+1)-1)6^{n+1}} = \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{(2n+1)3^{n+1}}.$$

Zur Untersuchung der Reihe mit dem Quotientenkriterium berechnen wir den Grenzwert

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{(2n+1)3^{n+1}}}{\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^n}{(2n-1)3^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-\frac{3}{2}\right|^{n+1}(2n-1)3^n}{\left|x-\frac{3}{2}\right|^n(2n+1)3^{n+1}}$$

$$= \left|x-\frac{3}{2}\right|\cdot\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = \left|x-\frac{3}{2}\right|\cdot\frac{1}{3}.$$

Hieraus folgt, dass die Reihe für $\left|x-\frac{3}{2}\right|\cdot\frac{1}{3}<1$, d. h. $\left|x-\frac{3}{2}\right|<3$, konvergiert und für $\left|x-\frac{3}{2}\right|\cdot\frac{1}{3}>1$, d. h. $\left|x-\frac{3}{2}\right|>3$, divergiert. Der Konvergenzradius (d. h. die obere Grenze des Abstandes vom Zentrum $x_0=\frac{3}{2}$, in dem die Reihe noch konvergiert) ist deshalb $R=3$.

Zur genauen Festlegung des Konvergenzbereichs sind noch die Punkte mit $q=1$, d. h. $\left|x-\frac{3}{2}\right|=3$, in denen das Quotientenkriterium keine direkte Aussage liefert, gesondert zu betrachten – dies sind $x_1=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$ und $x_2=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$.

Für $x_1=-\frac{3}{2}$ ergibt sich die Zahlenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)^n}{(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{3^n(-1)^n}{(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Diese Zahlenreihe ist nach dem Leibnizkriterium konvergent, weil $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Für $x_2=\frac{9}{2}$ ergibt sich die Zahlenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)^n}{(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}.$$

Diese divergiert nach dem Minorantenkriterium durch Vergleich mit der harmonischen Reihe, da

$$0\le\frac{1}{2n}\le\frac{1}{2n-1}\quad\text{und damit}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

gilt und die Reihe mit den kleineren Gliedern $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert (dies ist bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ die harmonische Reihe und somit eine *divergente* Minorante für die zu untersuchende Reihe).

Der Konvergenzbereich ist folglich das halboffene Intervall $\displaystyle\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$.

2. Variante: Wir behandeln die Reihe konkret als Potenzreihe mit Zentrum $\frac{3}{2}$, dann sind die Koeffizienten

$$a_n=\frac{2^n}{(2n-1)6^n}=\frac{1}{(2n-1)3^n}$$

bzw.

$$a_{n+1}=\frac{1}{(2(n+1)-1)3^{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}},$$

und der Konvergenzradius wird berechnet als

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 3^{n+1}}{(2n-1)\cdot 3^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=3.$$

Die Theorie der Potenzreihen liefert somit die Aussage, dass die Reihe im offenen Intervall $\left(\frac{3}{2}-3,\frac{3}{2}+3\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$ konvergiert sowie außerhalb des entsprechenden abgeschlossenen Intervalls $\left[-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$ divergiert.

Die Randpunkte $x_1=\frac{3}{2}$ und $x_2=\frac{9}{2}$ sind wie bei der ersten Variante gesondert zu untersuchen, woraus sich dann der Konvergenzbereich ergibt.

Aufgabe 6: Es seien
(7 P.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & -10 & 8 & 16 \\ 2 & -5 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Untersuchen Sie, ob es Fälle gibt, in denen das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$

(i) keine Lösung (ii) genau eine Lösung (iii) unendlich viele Lösungen hat.

Geben Sie dabei an, unter welchen Bedingungen an a und b der jeweilige Fall vorliegt.

(b) Bestimmen Sie für den Fall $a = 11$, $b = 4$ die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Welchen Rang haben Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix in diesem Fall? Geben Sie auch die allgemeine Lösung des *homogenen* Gleichungssystems für $a = 11$ an.

Lösung:

(a) Mittels Gauß-Algorithmus wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix in die Zeilenstufenform gebracht, in welcher Aussagen über die Lösbarkeit möglich sind:

$$\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -10 & 8 & 16 & 5 \\ 2 & -5 & 2 & a & b \\ \hline 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a-10 & b-2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{a-9} & b \end{array}$$

Es sollten unbedingt die Leitelemente markiert werden, da deren Anzahl den Rang der Matrix angibt und ihre Position bestimmt, welche Gleichungen am Ende zum Auflösen genutzt werden (nur die Gleichungen mit den markierten Leitelementen) und welche Variablen als freie Parameter gesetzt werden müssen (nur die Nichtleitvariablen – nach den Leitvariablen werden die Leitgleichungen dann aufgelöst). Je nachdem, ob der Ausdruck $a - 9$ in der letzten Zeile verschieden von Null oder gleich Null ist, ist dieser als drittes Leitelement zu markieren oder nicht.

(i) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, wenn in der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile und auf der rechten Seite in dieser Zeile eine von 0 verschiedene Zahl entsteht, oder äquivalent, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist. Dies gilt genau dann, wenn $a = 9$ und $b \neq 0$ ist. Dann gilt $2 = rg(A) < rg(A|\vec{b}) = 3$, denn das von 0 verschiedene b auf der rechten Seite wird dann ein drittes Leitelement in der erweiterten Koeffizientenmatrix.

(ii) Genau eine Lösung gibt es, wenn $rg(A)$ und $rg(A|\vec{b})$ beide gleich der Spaltenzahl von A sind, d. h. in allen Spalten von A Leitelemente entstehen, aber kein weiteres auf der rechten Seite. Dieser Fall kann vorliegend nicht eintreten, da die vierspaltige Matrix A hier höchstens den Rang 3 haben kann.

(iii) Unendlich viele Lösungen ergeben sich, wenn $rg(A)$ und $rg(A|\vec{b})$ gleich, aber kleiner als die Spaltenzahl von A sind. Dieser Fall liegt hier immer dann vor, wenn nicht der unter (i) beschriebene Fall der Unlösbarkeit eintritt, d. h. wenn

- $a = 9$ und $b = 0$ (dann ist $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 2$) oder
- $a \neq 9$ (und $b \in \mathbb{R}$ beliebig) ist (dann ist $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 3$).

(b) Für $a = 11$ und $b = 4$ liegt der zweite unter (iii) aufgeführte Fall vor, d. h. $rg(A) = rg(A|\vec{b}) = 3$. Die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix (hier nur die Zeilen mit markierten Leitelementen) sieht dann so aus:

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4. \end{array}$$

Zur Ermittlung der allgemeinen Lösung setzen wir die Nichtleitunbekannten (in den Spalten ohne Leitelement) als freien Parameter an: $x_3 = t$. Dann lösen wir die Leitgleichungen von unten nach oben auf:

$$\begin{aligned} 2x_4 = 4 &\Longrightarrow x_4 = 2 \\ -x_2 + 2t + 2 = 2 &\Longrightarrow x_2 = 2t \\ x_1 - 6t + 2t + 10 = 1 &\Longrightarrow x_1 = -9 + 4t \end{aligned}$$

In Vektorform haben wir die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.}_{\substack{\text{Anteil mit freien Parametern ist die} \\ \text{allg. Lsg. des homogenen Systems } A\vec{x}=\vec{0}}}$$

Es sei angemerkt, dass man ggf. die Leitelemente auch in anderen Spalten hätte wählen können. Dann wären andere Variable die freien Parameter, und die Lösungsdarstellung würde anders aussehen, insgesamt aber natürlich dieselbe Menge von Vektoren ergeben.

(c) Der Rang einer Matrix ist ablesbar an der Anzahl der Leitelemente. Für die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist er Falle $a = 11$ also gleich 3.

Zusatz-aufgabe: **(3 P.)**

Bestimmen Sie (falls vorhanden) folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} 2x \sinh\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh(x))^{\frac{1}{x}}$

Lösung:

(a) Da $x \to \infty$ und somit $\frac{1}{x} \to 0+$ (d. h. *von rechts* gegen 0) strebt, strebt auch $\sinh\left(\frac{1}{x}\right)$ von rechts gegen 0 (vgl. den Verlauf der sinh-Funktion in einem Tafelwerk), der Ausdruck ist also vom Typ $0 \cdot \infty$. Wir formen diesen auf einen Bruch vom Typ $\frac{0}{0}$ um und können darauf die L'Hospitalsche Regel anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} 2x \sinh\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{2\sinh\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}_{\frac{0}{0}} \underset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2\cosh\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cosh(0) = 2.$$

(b) Der Ausdruck ist von der Form 1^∞ für $x \to 0+$ bzw. $1^{-\infty} = \frac{1}{1^\infty}$ für $x \to 0-$. Derartige unbestimmte Potenzausdrücke versuchen wir durch Umschreiben mittels der e-Funktion (hier der besseren Lesbarkeit halber in der Form $\exp(\ldots)$ geschrieben) zu behandeln:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\cosh(x)\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(\cosh(x)\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\cosh(x)\right)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cosh(x)\right)}{x}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit der e-Funktion ausgenutzt wurde. Wir brauchen nun nur noch den Grenzwert im Exponenten (d. h. innerhalb der e-Funktion) von (**??**) zu bestimmen. Da $\cosh x$ für $x \to 0$ gegen $0+$ strebt und $\ln x$ für $x \to 0+$ gegen $-\infty$ geht. ist dieser vom Typ $\frac{-\infty}{\infty}$ für $x \to 0+$ sowie $\frac{\infty}{\infty}$ für $x \to 0-$, so dass für beide einseitigen Grenzwerte die L'Hospitalsche Regel angewandt werden kann. Da sich zeigt, dass aus beiden Richtungen das Gleiche herauskommt, schreiben hier hier gleich einen zweiseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\cosh(x)\right)}{x} \underset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cosh(x)} \cdot \sinh(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Einsetzen in (**??**) ergibt schließlich $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cosh(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.