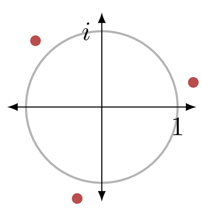
Musterlösung zur Klausur “Mathematik für Ingenieure” vom 21.02.2022

Auswahlaufgaben. Bei den ersten 15 Aufgaben sind keine Begründungen gefragt, Bemerkungen und Erklärungen werden jedoch bei der Bewertung berücksichtigt. Es können jeweils keine, eine, zwei oder alle drei Antwortmöglichkeiten richtig sein. Jede dieser Aufgaben wird für sich getrennt gewertet. Sind in einer Aufgabe alle drei Kästchen korrekt markiert, so gibt es für die Aufgabe einen Punkt. Ist höchstens ein Kästchen falsch markiert, gibt es einen halben Punkt. Sind zwei oder alle Kästchen falsch markiert, so gibt es keinen Punkt.

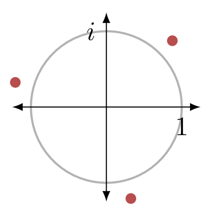
Aufgabe 1: Für die komplexe Zahl $z = 1 + i$ gilt

☐ $|z| = 2$, ☐ $\arg z = \frac{\pi}{2}$, ☒ $z^2 = 2i$.

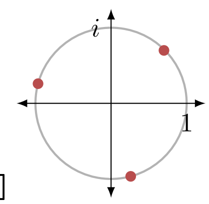
Aufgabe 2: In welchen Skizzen erfüllen die dargestellten komplexen Zahlen $z^3 = 1 + i$?



☒



☐



☐

Aufgabe 3: Welche der Folgen sind konvergent?

☐ $a_n = \dfrac{\sqrt{n} \cdot n}{\sqrt{n} + 2n}$ ☒ $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$ ☐ $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

Aufgabe 4: Welche der Reihen sind konvergent?

☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}$ ☒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

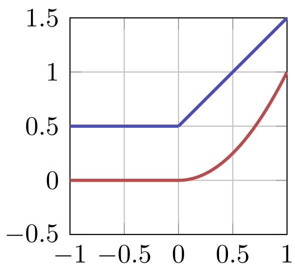
Aufgabe 5: Welche der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind bijektiv?

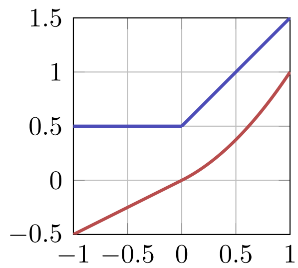
☒ $f(x) = x^5$ ☐ $f(x) = \sin x$ ☐ $f(x) = x^2$

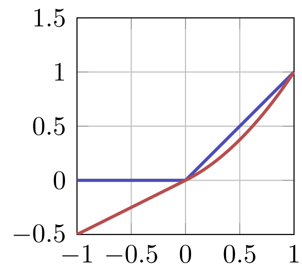
Aufgabe 6: Es sei $f(x) = 2x + 1$ und $g(y) = \sqrt{y}$. Dann gilt für $h = g \circ f^{-1}$

☐ $h(z) = 2\sqrt{z} + 1$, ☐ $h(z) = \frac{\sqrt{z}}{2} + 1$, ☒ $h(z) = \sqrt{\frac{z-1}{2}}$.

Aufgabe 7: Welche der Plots stellen eine Funktion (blau) zusammen mit einer zugehörigen Stammfunktion (rot) dar?

☐ 

☒ 

☐ 

Aufgabe 8: Welche der folgenden Funktionen sind konvex?

☒ $f(x) = e^x$ ☐ $f(x) = \ln x$ ☐ $f(x) = \sin x$

Aufgabe 9: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt für $h(x) = f(x)e^{f(x)}$

☐ $h'(x) = f'(x)e^{f'(x)}$, ☐ $h'(x) = f'(x)e^{f(x)}$, ☐ $h'(x) = f(x)e^{f'(x)}$.

Aufgabe 10: Sei $f(x) = \int_1^x \sin t \,\mathrm{d}t$. Dann gilt

☐ $f'(x) = \cos x$, ☒ $f'(x) = \sin x$, ☒ $\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$.

Aufgabe 11: Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

☒ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$ ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Aufgabe 12: Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

☐ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ ☒ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Aufgabe 13: Welche der folgenden Matrizen haben Rang 1?

☒ $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Aufgabe 14: Welche der folgenden Matrizen haben die Determinante 1?

☒ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Aufgabe 15: Unter welchen Voraussetzungen ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar?

☒ $\det \mathbf{A} \neq 0$ ☒ $\mathbf{A}$ hat Rang n ☒ $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\vec{0}\}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der komplette Lösungsweg anzugeben!

Aufgabe 16: Betrachten Sie die komplexe Zahl $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i}$. 4 Punkte

a) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ und das Argument $\arg z$ der komplexen Zahl z.

b) Berechnen Sie die Potenzen z^2 und z^{10} und geben Sie die Ergebnisse sowohl in exponentieller als auch in kartesischer Schreibweise an.

Lösung 16:

a) Der Betrag von z berechnet sich aus

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Zur Bestimmung des Arguments stellen wir zunächst fest, dass sich z im 3. Quadranten befindet. Damit gilt für das Argument

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right) + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

b) Wir nutzen die Formel von Moivre. Damit erhalten wir

$$z^2 = 2^2 e^{2\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = 4e^{\mathrm{i}\frac{10\pi}{4}} = 4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 4\mathrm{i}$$

und

$$z^{10} = 2^{10} e^{10\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = 1024e^{\mathrm{i}\frac{50\pi}{4}} = 1024e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 1024\mathrm{i}.$$

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Funktion $f\colon [2e^{-1}, 2e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln(\frac{x}{2})$. 6 Punkte

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrempunkte.

Lösung 17:

a) Wir leiten die Funktion nach der Produktregel ab $\left(\left(\ln \frac{x}{2}\right)' = (\ln x - \ln 2)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}\right)$ und erhalten

$$f'(x) = 2x \cdot \ln\frac{x}{2} + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\left(2\ln\frac{x}{2} + 1\right)$$
$$f''(x) = 2\ln\frac{x}{2} + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln\frac{x}{2} + 3.$$

b) Notwendige Bedingung für lokale Extremstellen *im Inneren des Intervalls*:

$$f'(x) = \underbrace{x}_{>0}\left(2\ln\frac{x}{2}+1\right) = 0 \iff 2\ln\frac{x}{2}+1=0 \iff \ln\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$\iff \frac{x}{2} = e^{-1/2} \iff x = 2e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Wir müssen uns vergewissern, dass die gefundene Nullstelle von f' tatsächlich im betrachteten Intervall liegt. Dies ist der Fall, da wegen $e \approx 2.718 > 1$ gilt

$$\frac{2}{e} < \frac{2}{\sqrt{e}} < 2e.$$

An der gefundenen stationären Stelle $x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ haben wir

$$f''(x_0) = 2\ln\left(e^{-1/2}\right) + 3 = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2 > 0,$$

so dass dort ein lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(x_0) = -\frac{2}{e} \approx -0.736$ vorliegt.

Außer den Stellen mit $f'(x) = 0$ *im Inneren* des Intervalls kommen die Intervallrandpunkte als lokale Extremstellen in Betracht. Da die Funktion f stetig ist und da x_0 ein lokales Minimum ist, sind die Randpunkte $x_1 = 2e^{-1}$ und $x_2 = 2e$ lokale Maxima (siehe Vorlesungsskript Folie 219). Sie haben die Funktionswerte $f(x_1) = 4e^{-2}\ln\left(e^{-1}\right) = -\frac{4}{e^2} \approx -0.541$ und $f(x_2) = 4e^2\ln(e) = 4e^2 \approx 29.56$.

Durch Vergleich der Funktionswerte der drei lokalen Extrema ergeben sich schließlich das globale Minimum $f(x_0) = -\frac{2}{e} \approx -0.736$ und das globale Maximum $f(x_2) = 4e^2 \approx 29.56$.

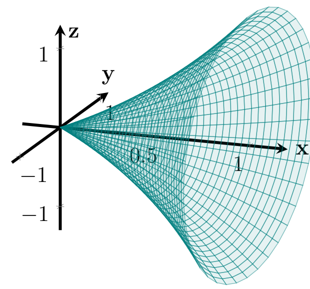
Aufgabe 18: Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e-x)-1}{e^{2x}-e^{-x}}$. 2 Punkte

Lösung 18: Der Grenzwert ist vom Typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ also können wir die Regel von L'Hospital verwenden. Wir berechnen zunächst die Ableitungen von $f(x) = \ln(e-x)-1$ und $g(x) = e^{2x}-e^{-x}$, d.h.

$$f'(x) = -\frac{1}{e-x} \qquad \text{und} \qquad g'(x) = 2e^{2x}+e^{-x}.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e-x)-1}{e^{2x}-e^{-x}} &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{(e-x)(2e^{2x}+e^{-x})}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2e^{2x+1}+e^{-x+1}-2xe^{2x}-xe^{-x}} = -\frac{1}{3e}.\end{aligned}$$



Aufgabe 19: Bestimmen Sie das Volumen des durch die Rotation der Funktion $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$ um die x-Achse erzeugten Rotationskörpers im Intervall $[0, 1]$. 4 Punkte

Lösung 19: Ein durch Drehung einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse erzeugter Rotationskörpers hat das Volumen $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Mit $f^2(x) = (xe^{\frac{x}{2}})^2 = x^2\mathrm{e}^x$ berechnen wir

$$V = \pi \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Dazu integrieren wir zweimal partiell

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(x^2\mathrm{e}^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \right) = \pi \left(x^2\mathrm{e}^x \Big|_0^1 - \left(2x\,\mathrm{e}^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \right) \right) \\ &= \pi \left(x^2\mathrm{e}^x - 2x\,\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x \right) \Big|_0^1 = \pi\,(\mathrm{e} - 2) \end{aligned}$$

Aufgabe 20: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \sin(\frac{x}{2}) - 2x^2 + 5$. 7 Punkte

a) Begründen Sie, dass f auf dem Intervall $[-2, 0]$ eine Nullstelle x_N haben muss.

b) Stellen Sie das Taylorpolynom T_2 vom Grad 2 von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf.

c) Berechnen Sie die Nullstelle $\tilde{x}_N$ des Taylorpolynoms T_2 im Intervall $[-2, 0]$.

d) Bestimmen Sie den Fehler $\triangle y = |f(x_N) - f(\tilde{x}_N)|$ und leiten Sie daraus die Größenordnung des Fehlers $\triangle x = |x_N - \tilde{x}_N|$ zwischen der wahren Nullstelle x_N von f und der Nullstelle $\tilde{x}_N$ von T_2 ab.

Lösung 20:

a) Für die Funktionswerte $f(-2)$ und $f(0)$ ergibt sich durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} f(-2) &= \sin(-1) - 2\cdot(-2)^2 + 5 = \sin(-1) - 8 + 5 = \sin(-1) - 3 < 0, \\ f(0) &= \sin(0) - 2\cdot 0^2 + 5 = 0 - 2\cdot 0 + 5 = 5 > 0. \end{aligned}$$

Da f außerdem stetig ist folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass f mindestens eine Nullstelle zwischen $x = -2$ und $x = 0$ besitzen muss.

b) Das Taylorpolynom T_2 vom Grad 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$T_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2.$$

Deshalb bestimmen wir zunächst die Ableitungen f' und f'' von f, sowie deren Werte im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - 2x^2 + 5, & f(0) &= 5 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) - 4x, & f'(0) &= \tfrac{1}{2} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{4}\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) - 4, & f''(0) &= -4. \end{aligned}$$

Dies können wir nun in die obige Formel einsetzen und erhalten somit

$$T_2(x) = 5 + \frac{1}{2}x - \frac{4}{2}x^2 = -2x^2 + \frac{1}{2}x + 5.$$

c) Um die Nullstelle $\widetilde{x}_N \in [-2, 0]$ des Taylorpolynoms zu bestimmen, müssen wir lediglich das Taylorpolynom gleich 0 setzen:

$$\begin{aligned} T_2(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + \frac{1}{2}x + 5 &= 0 & &| : (-2) \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} &= 0 & &|\, \text{p-q-Formel} \\ x_{1,2} = \frac{1}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{5}{2}} &= \frac{1}{8} \pm \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{160}{64}} = \frac{1 \pm \sqrt{161}}{8}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $x_1 = \frac{1-\sqrt{161}}{8} \approx -1.4611$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{161}}{8} \approx 1.7111$. Die Nullstelle x_2 liegt nicht im relevanten Intervall $[-2, 0]$ und entfällt daher. Für die gesuchte Nullstelle $\widetilde{x}_N$ ergibt sich schließlich $\widetilde{x}_N = x_1 \approx -1.4611$.

d) Da x_N die Nullstelle von f bezeichnet, gilt $f(x_N) = 0$ und somit ergibt sich

$$\Delta y = |f(x_N) - f(\widetilde{x}_N)| = |f(\widetilde{x}_N)| = \left|\sin\left(\frac{\widetilde{x}_N}{2}\right) - 2\widetilde{x}_N^2 + 5\right| \approx 0.0633.$$

Darauf aufbauend können wir dann den horizontalen Fehler $\Delta x = |x_N - \widetilde{x}_N|$ wie folgt schätzen:

$$\Delta x \approx \left|\frac{\Delta y}{f'(\widetilde{x}_N)}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{\widetilde{x}_N}{2}\right) - 2\widetilde{x}_N^2 + 5}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\widetilde{x}_N}{2}\right) - 4\widetilde{x}_N}\right| \approx 0.0102.$$

Aufgabe 21: Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ mit 7 Punkte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -7 & 5 & -6 \\ 3 & 11 & -9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ a \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem lösbar ist.

b) Ermitteln Sie für diese a die Lösungsmenge des Gleichungssystems und geben Sie den Nullraum (Kern) sowie den Rang der Matrix $\mathbf{A}$ an.

Lösung 21:

a) Mittels Gauß-Algorithmus wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix in die Zeilenstufenform gebracht, in welcher Aussagen über die Lösbarkeit möglich sind:

$$\begin{array}{rrrr|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -7 & 5 & -6 & 12 \\ 3 & 11 & -19 & 10 & a \\ \hline 0 & \boxed{-1} & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & a+6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a+22 \end{array}$$

Es sollten unbedingt die Leitelemente markiert werden, da deren Anzahl den Rang der Matrix angibt und ihre Position bestimmt, welche Gleichungen am Ende zum Auflösen genutzt werden (nur die Gleichungen mit den markierten Leitelementen) und welche Variablen als freie Parameter gesetzt werden müssen (nur die Nichtleitvariablen – nach den Leitvariablen werden die Leitgleichungen dann aufgelöst).

Das Gleichungssystem ist genau dann nicht lösbar, wenn in der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile und auf der rechten Seite in dieser Zeile eine von 0 verschiedene Zahl entsteht. (Äquivalent: Wenn der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist.)

Somit ist es, wie man an der letzten Zeile erkennt, genau im Fall $a = -22$ lösbar.

b) Die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix (hier nur die Zeilen mit markierten Leitelementen, die beim Auflösen berücksichtigt werden müssen) sieht dann so aus:

$$\begin{array}{rrrr|l} \boxed{1} & 3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -2 & 8. \end{array}$$

Zur Ermittlung der allgemeinen Lösung setzen wir die Nichtleitunbekannten (in den Spalten ohne Leitelement) als freie Parameter an: $x_3 = s$, $x_4 = t$. Dann lösen wir die Leitgleichungen von unten nach oben auf:

$$\begin{aligned} -x_2 + 3s - 2t = 8 &\implies x_2 = -8 + 3s - 2t \\ x_1 + 3(-8 + 3s - 2t) - s + 2t = -2 &\implies x_1 = 22 - 8s + 4t. \end{aligned}$$

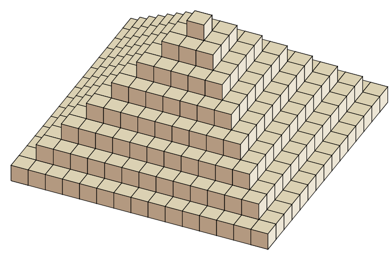
In Vektorform haben wir die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{+ s \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.}_{\substack{\text{Anteil mit freien Parametern ist die} \\ \text{allg. Lsg. des homogenen Systems } \mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}, \\ \text{d. h. der Kern (Nullraum) der Matrix}}}$$

Es sei angemerkt, dass man ggf. die Leitelemente auch in anderen Spalten hätte wählen können. Dann wären andere Variable die freien Parameter, und die Lösungsdarstellung würde anders aussehen, insgesamt aber natürlich dieselbe Menge von Vektoren ergeben.

Der Rang einer Matrix ist ablesbar an der Anzahl der Leitelemente, in diesem Falle also gleich 2.

Aufgabe 22 (Zusatzaufgabe): Steve spielt gern Minecraft und möchte eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche (siehe rechts) bauen. Dafür muss er vorher gleich große Sandsteinblöcke sammeln.



a) Stellen Sie eine Summenformel für die Anzahl der benötigten Blöcke für eine Pyramide mit n Schichten auf. 3 Punkte

b) Berechnen Sie die Anzahl der benötigten Blöcke für eine Pyramide mit $n = 69$ Schichten.

Tipp: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Lösung 22:

a) Die einzelnen Schichten der Pyramide sind Quadrate mit ungerader Seitenlänge, d.h. die Schichten bestehen aus $1, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, \ldots$ Blöcken. Daraus folgt, dass die k-te Schicht aus $(2k-1)^2$ Blöcken zusammengesetzt ist. Wenn wir über die ersten n Schichten summieren erhalten wir

$$N = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2.$$

als Anzahl an Blöcken der gesamten Pyramide.

b) Wir multiplizieren $(2k-1)^2$ aus und zerlegen die Summe folgendermaßen

$$N = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 4k + 1) = 4 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2} - 4 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n} .$$

Wir verwenden den Tipp  $= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ und die Gaußsche Summenformel  $= \frac{n(n+1)}{2}$. Einsetzen von $n = 69$ liefert

$$N = \tfrac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n = \tfrac{1}{3} n(2n-1)(2n+1) = 437989.$$

Das sind umgerechnet 6844 Stacks, oder 254 Truhen.