Studiengang:	**Matrikelnummer:**

1	2	3	4	5	6	Z	Aufg.	Bonus	*Theo.*	Ges.	**Note**

Prüfungsklausur zum Modul
Höhere Mathematik für Ingenieure 2

22. 7. 2019, 8.30 - 11.30 Uhr

- Aufgabenteil (180 min.) -

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, die vorgegebene *Tabelle von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln*, *Taschenrechner* (auch grafikfähig) aber **ohne** Computer-Algebra-System (CAS).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Das gilt insbesondere für auftretende Integrale, die durch Anwendung geeigneter Integrationsmethoden zu lösen sind. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.
(8 P.)

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von α. Ermitteln Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A drei verschiedene Eigenwerte hat.

(b) Wie muss $\alpha \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $\vec{v} = (-15, -2, 10)^T$ Eigenvektor von A ist? Geben Sie auch den zugehörigen Eigenwert an.

(c) Für den Fall $\alpha = 12$ berechne man die Eigenvektoren von A, gebe die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte an und entscheide, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Die EW der Matrix A ermittelt man mittels

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha & -\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ \alpha & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(3+\alpha)(\lambda^2 - 4\lambda - \alpha) \overset{!}{=} 0.$$

Man erhält die allgemeine Darstellung der EW

$$\lambda_1 = -3,\ \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4+\alpha}.$$

Um drei verschiedene EW zu erhalten muss also zunächst $\alpha \neq -4$ gelten, damit $\lambda_2 \neq \lambda_3$ ist. Außerdem müssen die beiden letzten EW verschieden von λ_1 sein:

$$\begin{aligned} -3 \neq 2 \pm \sqrt{4+\alpha} &\iff 0 \neq 5 \pm \sqrt{4+\alpha} \\ &\iff 5 \neq \sqrt{4+\alpha} \\ &\iff \alpha \neq 21. \end{aligned}$$

Das heißt insgesamt $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 21\}$.

(b) Es muss also gelten

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 45-10-20 \\ -8+10 \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ -2\alpha \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -15\lambda \\ -2\lambda \\ 10\lambda \end{pmatrix} = \lambda\vec{v}.$$

Aus der zweiten Zeile erhält man $\lambda = -1$ und damit muss $\alpha = 5$ gelten .

(c) Hier ist $\alpha = 12$ gewählt. Man ermittle die EV zu den EW:

$\boxed{\lambda_1 = -3}$ Die algebraische VFH ist eins. Das zugehörige System ergibt sich zu

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 12 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-9} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$t\vec{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R},$$

der zugehörige Eigenunterraum hat die Dimension eins, also ist die geometrische VFH ebenfalls eins.

$\boxed{\lambda_2 = 6}$ Die algebraische VFH ist eins. Das zugehörige System ergibt sich zu

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{-9} & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$t\vec{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R},$$

der zugehörige Eigenunterraum hat die Dimension eins, also ist die geometrische VFH ebenfalls eins.

$\boxed{\lambda_3 = -2}$ Die algebraische VFH ist eins. Das zugehörige System ergibt sich zu

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$t\vec{v}_3 = t\begin{pmatrix}17\\1\\-6\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R},$$

der zugehörige Eigenunterraum hat die Dimension eins, also ist die geometrische VFH ebenfalls eins.
Insgesamt ist die Matrix A damit diagonalisierbar (d. h. ähnlich zur Diagonalmatrix der EW),

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 17\\0 & 9 & 1\\0 & 18 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 17\\0 & 9 & 1\\0 & 18 & -6\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 17\\0 & 9 & 1\\0 & 18 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{13}{3} & \frac{19}{9}\\0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{72}\\0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: **(6 P.)**

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $yy' + \dfrac{y}{x} = 0, \quad x > 0.$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$.

(c) Gegeben ist das lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\vec{y}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems. Wie lautet die zugehörige Differentialgleichung 2. Ordnung?

Lösung:

(a) Es handelt sich um eine nichtlineare Dgl. erster Ordnung – dabei sollte man, sofern nichts Anderes vorgegeben ist, zunächst die Trennbarkeit der Veränderlichen testen. Schreiben wir die Ableitung y' in der Form $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, so erhalten wir durch Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration

$$\begin{aligned}
y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{y}{x}\\
\mathrm{d}y &= -\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \text{(falls } y \neq 0\text{)}\\
\int \mathrm{d}y &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
y &= -\ln|x| + c = -\ln(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{(beachte } x > 0\text{)}
\end{aligned}$$

Der Fall $y \equiv 0$ muss noch gesondert überprüft werden – durch Einsetzen in die ursprüngliche Dgl. erkennt man, dass dieser ebenfalls eine Lösung darstellt.

(b) Da es sich um eine inhomogene *lineare* Dgl. handelt, ist die allgemeine Lösung die Summe aus einer speziellen Lösung dieser Gleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Dgl.

Die homogene Dgl. $y'' + 2y' + y = 0$ hat *konstante Koeffizienten*, daher führt hier der Ansatz $y_h = \mathrm{e}^{\lambda x}$ zum Ziel, wobei λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Dgl. sein muss, also

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Wir erhalten $\lambda_{1,2} = -1$, also eine *doppelte* reelle Nullstelle. Zusätzlich zu der sich aus dem Ansatz ergebenden Lösung $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ haben wir daher noch die Lösung $y_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. besteht dann aus den Linearkombinationen dieser beiden Lösungen, die ein Fundamentalsystem bilden:

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 x \mathrm{e}^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eine *spezielle Lösung* der *inhomogenen* Dgl. können wir durch Ansätze vom Typ der rechten Seite finden. Stellen wir diese in der allgemeinsten von uns behandelten Form $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) R_m(x)$ mit einem Polynom R_m vom Grad m dar, so haben wir

$$r(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(0x) R_0(x).$$

Zunächst testen wir auf den Resonanzfall. Dieser läge vor, wenn (in obigen Bezeichnungen) $\alpha + \mathrm{i}\beta$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms wäre. Hier ist $\alpha = 2$, $\beta = 0$, somit $\alpha + \mathrm{i}\beta = 2$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so dass kein Resonanzfall vorliegt und wir mit dem Standardansatz

$$y_s(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(0x) T_0(x) = c\mathrm{e}^{2x}$$

auskommen. Somit ist $y_s'(x) = 2c\mathrm{e}^{2x}$ und $y_s''(x) = 4c\mathrm{e}^{2x}$. Einsetzen in die Dgl. führt zu

$$4c\mathrm{e}^{2x} + 4c\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{2x} = 9c\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich $c = \dfrac{1}{9}$, also $y_s(x) = \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{2x}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. ist somit

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Es handelt sich um ein lineares homogenes Dgl.-system 1. Ordnung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, das mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix A gelöst werden kann. Bestimmung der Eigenwerte von A:

$$\det A - \lambda E = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Die Eigenwerte sind deshalb $\lambda_{1/2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1+8}{4}}$, also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$: Wir lösen das homogene Gleichungssystem $(A - 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{array}{rr|r} -2 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = t\vec{v}_1,\ t \in \mathbb{R},\ \text{mit dem Eigenvektor } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x} = t\vec{v}_2,\ t \in \mathbb{R},\ \text{mit dem Eigenvektor } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als allgemeine Lösung des homogenen Dgl.-Systems erhält man damit

$$\vec{y}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\vec{v}_2 = c_1 \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zur Umformung in eine Dgl. 2. Ordnung:

Mit $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ lautet das Dgl.-system komponentenweise ausgeschrieben

$$\begin{array}{rcrcl} y_1'(t) & = & & & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t). \end{array}$$

Da die beiden Komponenten durch die Beziehung $y_1' = y_2$ zusammenhängen, ergibt sich für $y(t) := y_1(t)$ die Beziehung

$$y''(t) = y_1''(t) = y_2'(t) = 2y_1(t) + y_2(t) = 2y(t) + y'(t),$$

die Funktion y erfüllt also die Differentialgleichung

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0.$$

Aufgabe 3: **(10 P.)**

(a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extremstellen der Funktion $F(x, y) = 2x^3 - 9x^2 + 9y^2 + 6xy^2$.

(b) Es sei $f(x, y) = x - 2\sqrt{3}\,y + 7$. Ermitteln Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren alle Punkte, die die notwendigen Bedingungen für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) := \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$ erfüllen.

Lösung:

(a) Als notwendige Extremalbedingung setzen wir die ersten partiellen Ableitungen Null:

$$f_x = 6x^2 - 18x + 6y^2 = 0 \tag{1}$$
$$f_y = 18y + 12xy = 6y(3 + 2x) = 0. \tag{2}$$

Wie stets bei Extremalaufgaben suchen wir nur reelle Lösungen.

Wir untersuchen am einfachsten zuerst (2), da hier ein *Produkt* Null gesetzt wird. Es ergeben sich die beiden Fälle $y = 0$ *oder* $3 + 2x = 0$, also $x = -\frac{3}{2}$.

Fall 1: Einsetzen von $y = 0$ in (1) liefert die Beziehung $6x^2 - 18x = 6x(x - 3) = 0$ und somit $x = 0$ oder $x = 3$.

Fall 2: Einsetzen von $x = -\frac{3}{2}$ in (1) führt zu $\frac{54}{4} + 27 + 6y^2 = 0$. Da die linke Seite der Gleichung offenbar stets positiv ist, hat diese keine (reelle) Lösung

Wir haben also zwei stationäre Punkte: $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (3, 0)$.

Zur Prüfung hinreichender Extremalbedingungen in diesen stationären Punkten benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$f_{xx} = 12x - 18, \quad f_{xy} = f_{yx} = 12y, \quad f_{yy} = 12x + 18.$$

In den stationären Punkten untersuchen wir nun die Hessematrix

$$H_f(x,\, y) = \begin{pmatrix} 12x - 18 & -12y \\ 12y & 12x + 18 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit.

In P_1 erhalten wir

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det H_f(P_1) = -18 \cdot 18 < 0$, so dass die Matrix indefinit ist. Daher liegt in P_1 kein lokales Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Weiter ist

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix},$$

somit $\det H_f(P_2) = 36 \cdot 54 > 0$ und $f_{xx}(P_2) = 36 > 0$, die Hessematrix an dieser Stelle ist also positiv definit, so dass ein lokales Minimum (mit dem Funktionswert $f(P_2) = -27$) vorliegt. (Man kann die positive Definitheit auch damit begründen, dass die Eigenwerte $\lambda_1 = 36$ und $\lambda_2 = 54$ von $H_f(P_2)$ positiv sind.)

(b) Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x - 2\sqrt{3}\, y + 7 + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right).$$

Notwendig für ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung sind die Bedingungen

$$L_x(x, y, \lambda) = L_y(x, y, \lambda) = L_\lambda(x, y, \lambda) = 0,$$

wir haben also das Gleichungssystem

$$L_x = 1 + \lambda \frac{x}{2} = 0 \tag{3}$$

$$L_y = -2\sqrt{3} + 2\lambda y = 0 \tag{4}$$

$$L_\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Man kann nun z. B. mittels (3) bzw. (4) die Variablen x bzw. y jeweils eindeutig durch λ ausdrücken:

$$x = -\frac{2}{\lambda}, \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{\lambda}. \tag{6}$$

Die Ergebnisse setzen wir in (5) ein, so dass in dieser Gleichung nur noch λ vorkommt:

$$\frac{1}{4}\frac{4}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda^2} = \frac{4}{\lambda^2} = 1,$$

also $\lambda^2 = 4$ und somit $\lambda = \pm 2$. Einsetzen in (6) ergibt im Falle $\lambda = 2$ den stationären Punkt $P_1 = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und im Falle $\lambda = -2$ den stationären Punkt $P_2 = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Alternativ könnte man zuerst (3) nach λ auflösen und das Ergebnis $\lambda = -\frac{2}{x}$ in (4) einsetzen, woraus sich dann wiederum $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ergibt. Dieses Ergebnis setzt man in (5) ein, man erhält $x^2 = 1$, zu den beiden Lösungen $x = \pm 1$ berechnet man dann jeweils das dazugehörige y.

Aufgabe 4: **(5 P.)** Eine punktförmige Lichtquelle Q beleuchte einen Punkt P auf einer Oberfläche. Der Abstand r zwischen Q und P ist gleich $r(h, f, \varphi) = \sqrt{\dfrac{h \cdot \cos\varphi}{f}}$, wobei h die Intensität von Q, f die Beleuchtungsstärke im Punkt P und φ den Winkel zwischen dem Lichtstrahl und der Normalenrichtung der beleuchteten Oberfläche bezeichnen.

Die Intensität der Quelle wird bestimmt als $h_0 = 100$, die Beleuchtungsstärke als $f_0 = 0.04$ und der Winkel als $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$.

Die Bestimmung der Intensität h_0 erfolgte mit einer relativen Fehlertoleranz von 2%. Die absolute Fehlertoleranz der Beleuchtungsstärke f_0 betrage $\frac{1}{1000}$. Der Winkel φ_0 wurde mit einer relativen Toleranz von 5% gemessen. Bestimmen Sie eine Näherung für den absoluten und relativen Fehler des im Messpunkt berechneten Abstandes r mit Hilfe des vollständigen Differentials.

Lösung:

Im Messpunkt gilt $\sqrt{f_0} = 0.2$, $\sqrt{h_0} = 10$ und $\sqrt{\cos(\varphi_0)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Der Abstand im Messpunkt ist damit $r_0 = \sqrt{\frac{h_0 \cdot \cos(\varphi_0)}{f_0}} = \frac{10}{0.2}\sqrt{\cos(\frac{\pi}{3})} = 25\sqrt{2}$.

Die partiellen Ableitungen

$$\partial_h r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos(\varphi)}{hf}}, \quad \partial_f r = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h\cos(\varphi)}{f^3}}, \quad \partial_\varphi r = -\frac{\sin(\varphi)}{2}\sqrt{\frac{h}{f\cos(\varphi)}}$$

Im Messpunkt gilt

$$\partial_h r_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}, \quad \partial_f r_0 = -\frac{625\sqrt{2}}{2}, \quad \partial_\varphi r_0 = -\frac{25\sqrt{6}}{2}$$

Damit gilt für die lineare Approximation

$$\begin{aligned} r &\approx r_0 + \partial_h r_0 \cdot (h - h_0) + \partial_f r_0 \cdot (f - f_0) + \partial_\varphi r_0 \cdot (\varphi - \varphi_0) \\ &= 25\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}(h - 100) - \frac{625\sqrt{2}}{2}(f - 0.04) - \frac{25\sqrt{6}}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Für das vollständige Differential gilt

$$\Delta_r = r - r_0 = \partial_h r_0 \cdot \Delta_h + \partial_f r_0 \cdot \Delta_f + \partial_\varphi r_0 \cdot \Delta_\varphi,$$

wobei $\Delta_h = h - h_0$ usw.

Die maximalen Fehlertoleranzen sind gegeben durch

$$|\Delta_h| \leq 0.02 h_0 = 2$$
$$|\Delta_f| \leq \frac{1}{1000}$$
$$|\Delta_\varphi| \leq 0.05\frac{\pi}{3}.$$

Wir sind an einer betragsmäßigen Abschätzung interessiert, dabei ist

$$\begin{aligned}|\Delta_r| &= |\partial_h r_0 \cdot \Delta_h + \partial_f r_0 \cdot \Delta_f + \partial_\varphi r_0 \cdot \Delta_\varphi| \\ &\leq |\partial_h r_0 \cdot \Delta_h| + |\partial_f r_0 \cdot \Delta_f| + |\partial_\varphi r_0 \cdot \Delta_\varphi|.\end{aligned}$$

Damit gilt für die absoluten bzw. relativen Fehlerabschätzungen

$$|\Delta_r| \leq 2\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{1000}\frac{625\sqrt{2}}{2} + 0.05\frac{\pi}{3}\frac{25\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{16} + \frac{5\pi\sqrt{6}}{24} \approx 2.4$$
$$\left|\frac{\Delta_r}{r_0}\right| \leq \frac{1}{25\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{16} + \frac{5\pi\sqrt{6}}{24}\right) = \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{80} + \frac{\sqrt{3}\pi}{120}\right) \approx 0.068.$$

Aufgabe 5: **(9 P.)**

(a) Bestimmen Sie die Länge der Raumkurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{\gamma}(t) = \left(-2\sin t,\, \frac{1}{3}t^{3/2},\, 2\cos t\right)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\vec{\gamma}} \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right),$$

wobei $\vec{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $\vec{\gamma}(t) := (t, -t+1)^T$.

Weisen Sie nach, dass obiges Kurvenintegral wegunabhängig ist, und berechnen Sie eine Stammfunktion.

Lösung:

(a) Wir haben $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \frac{1}{2}t^{1/2} \\ -2\sin t \end{pmatrix}$,

somit ist das skalare Bogenelement gleich

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s = |\vec{\gamma}'(t)|\,\mathrm{d}t &= \sqrt{4\cos^2 t + \frac{1}{4}t + 4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{4 + \frac{1}{4}t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{16+t}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{16+t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Kurvenlänge ist dann

$$\begin{aligned}L = \int_{\vec{\gamma}} \mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{16+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(16+t)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{3}\left((16+2\pi)^{2/3} - 64\right) \approx 13.7.\end{aligned}$$

(b) Wir haben $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t$, für das gegebene Kurvenintegral 2. Art erhalten wir somit durch Einsetzen der Parametrisierung

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^2+(1-t)^2} - \frac{1-t}{1+t^2+(1-t)^2}\right) \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{2t-1}{1+2t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(Da der quadratische Nenner keine reellen Nullstellen hat, stellt dies übrigens bereits die Partialbruchzerlegung des Integranden dar.) Da der Zähler offenbar die Ableitung des Nenners ist, benutzen wir die Substitution $s = t^2 - t + 1$, $\mathrm{d}s = (2t-1)\,\mathrm{d}t$ und erhalten

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{1}{2}\ln|s|\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Das Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mit $P(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$ und $Q(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2+y^2}$ ist in ganz $\mathbb{R}^2$ (einfach zusammenhängendes Gebiet) definiert, für die Wegunabhängigkeit ist daher die *Integrabilitätsbedingung* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ hinreichend. Diese ist erfüllt, da

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

$\vec{v}$ besitzt also eine Stammfunktion F, d. h. eine skalare Funktion F zweier Variabler, für die $F_x = P$ und $F_y = Q$ gilt. Wir ermitteln eine solche mit der *Ansatzmethode*: Zunächst erhalten wir durch Integration der ersten Gleichung bezüglich x mittels der Substitution $t = 1 + x^2 + y^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ die Beziehung

$$\begin{aligned}F(x,y) &= \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c(y) = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2+y^2\right| + c(y).\end{aligned}$$

Dabei ist $c(y)$ der Ansatz für die noch von y abhängige Integrationskonstante. Zu deren Bestimmung setzen wir den für $F(x,y)$ erhaltenen Ausdruck in $F_y = Q$ ein und bekommen

$$F_y(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{1+x^2+y^2} + c'(y) \overset{!}{=} \frac{y}{1+x^2+y^2},$$

woraus $c'(y) = 0$ und nach Integration bezüglich y die Gleichung

$$c(y) = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

folgt. Alle Stammfunktionen F sind somit von der Form

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln|1+x^2+y^2| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Nachdem die Wegunabhängigkeit gezeigt und eine Stammfunktion berechnet ist, könnte man obiges Kurvenintegral 2. Art auch durch Einsetzen von Anfangspunkt $(0,1)$ und Endpunkt $(1,0)$ der Kurve in eine Stammfunktion bestimmen:

$$\int_{\vec{\gamma}} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = F(1,0) - F(0,1) = 0.$$

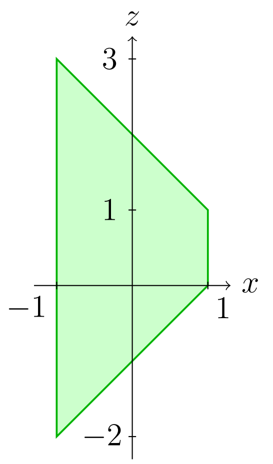
Aufgabe 6: Gegeben sei ein Körper, der von der Fläche $x^2+y^2=1$ sowie den Ebenen $x-z-1=0$ und $x+z-2=0$ begrenzt wird. Veranschaulichen Sie sich den Körper mittels Schnittkurven und bestimmen Sie anschließend das Volumen des Körpers (unter Verwendung eines Raumintegrals).

(7 P.)

Lösung:

Die Begrenzungsfläche des Körpers mit der Gleichung $x^2+y^2=1$ ist ein Kreiszylindermantel mit Radius 1 um die z-Achse.

Wir betrachten weiterhin den Schnitt des Körpers mit der x-z-Ebene: Dort gilt $y=0$, der Schnitt dieser Ebene mit dem Kreiszylinder $x^2+y^2=1$ hat daher die Gleichung $x^2=1$. Dies liefert die beiden Geraden $x=1$ und $x=-1$. Die beiden Ebenen, die den Körper ebenfalls begrenzen, schneiden sich mit der x-z-Ebene in den Geraden $z=x-1$ und $z=2-x$. Der Schnitt des Körpers mit der Ebene ist dann der von diesen vier Geraden eingeschlossene Bereich:



Wir verwenden am besten Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\\
y &= r\sin\varphi\\
z &= z.
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist, dass der Betrag der Funktionaldeterminante $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r$ mit unter das Integral kommt.

Der Körper K wird in z-Richtung von den beiden Ebenen mit den Gleichungen $z=x-1$ und $z=2-x$ begrenzt, als Integrationsgrenzen erhält man daher

$$
\begin{aligned}
0 \le \varphi &\le 2\pi\\
0 \le r &\le 1\\
r\cos\varphi - 1 \le z &\le 2 - r\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

Damit folgt für das Volumen V von K.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_K \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r\cos\varphi-1}^{2-r\cos\varphi} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 rz\Big|_{z=r\cos\varphi-1}^{2-r\cos\varphi} \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(3-2r\cos\varphi) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{2}{3} r^3 \cos\varphi \right)\Big|_{r=0}^{1} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\cos\varphi \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= 3\pi - \left(\frac{2}{3}\sin\varphi \right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = 3\pi.
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe: **(3 P.)**

Gegeben sei die Kurve $x^3 - y^2 - 2xy = 0$.

(a) Ermitteln Sie den Anstieg der Kurve im Punkt $(3,3)$.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \neq (0,0)$ der Kurve, in denen senkrechte Tangenten existieren.

Lösung:

Durch

$$F(x,y) := x^3 - y^2 - 2xy = 0 \tag{7}$$

wird lokal eine implizite Funktion $y = f(x)$ definiert.

(a) Die Ableitung der impliziten Funktion ist gleich

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 2y}{-2y - 2x}. \tag{8}$$

Der Punkt mit den Koordinaten $x = y = 3$ erfüllt offenbar (7), liegt also auf der Kurve. Einsetzen der Punktkoordinaten in (8) ergibt $f'(3) = \frac{7}{4}$.

(b) Eine implizit gegebene Kurve hat senkrechte Tangenten, wenn in einem Kurvenpunkt $F_y(x,y) = 0$ und $F_x(x,y) \neq 0$ gilt. Aus $F_y(x,y) = -2y - 2x = 0$ ergibt sich $y = -x$.

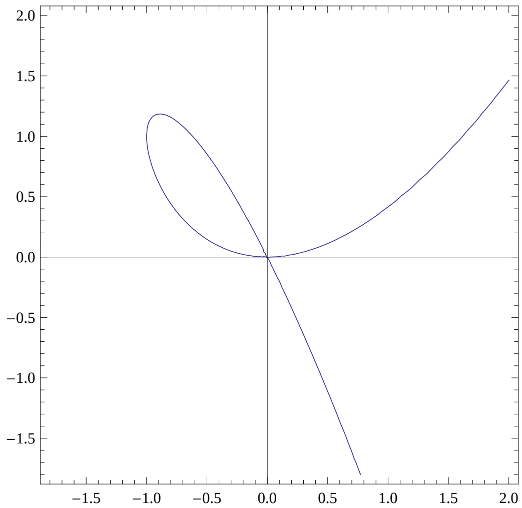
Einsetzen in die Kurvengleichung (7) führt zu

$$x^3 - x^2 + 2x^2 = x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0.$$

Eine Lösung wäre $x = 0$ und somit $y = 0$, was wir jedoch ausgeschlossen hatten, da dort auch die Ableitung $F_x = 3x^2 - 2y$ Null wird.

Nullsetzen des anderen Faktors liefert $x = -1$ und somit $y = 1$ als korrekte Lösung, denn dort ist $F_x(-1,1) = 1 \neq 0$.

Hier zur Illustration ein Bild der Kurve (nicht verlangt):


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0