Prüfungsklausur zum Modul (Höhere) Mathematik für Ingenieure 2

26. 7. 2021

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, das vorgegebene *Formelblatt von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln, zugelassene wissenschaftl. Taschenrechner* (**kein** GTR, **kein** Computer-Algebra-System (CAS)).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: (7 P.)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ hat A *drei voneinander verschiedene reelle* Eigenwerte?

(b) Die Matrix A besitzt für $\gamma = -3$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 3$. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B an, so dass für die Matrix A gilt $AB = BD$.

Lösung:

(a) Eine Zahl λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & \gamma \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (5-\lambda)\big(-(2-\lambda)\lambda + \gamma\big) \\ &= (5-\lambda)\big(\lambda^2 - 2\lambda + \gamma\big) = 0 \end{aligned}$$

ist (Entwicklung der Determinante nach 1. Spalte). Offenbar ist also ein Eigenwert $\lambda_1 = 5$, für die beiden anderen gilt

$$\lambda^2 - 2\lambda + \gamma = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-\gamma}.$$

- Im Fall $\gamma > 1$ ist der Ausdruck unter der Wurzel negativ, so dass wir zwei zueinander konjugiert komplexe nichtreelle EW λ_2 und λ_3 haben.
- Im Fall $\gamma = 1$ gilt $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, wir haben also zwei gleiche reelle EW.
- Im Fall $\gamma < 1$ ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv, die EW λ_2 und λ_3 sind daher reell und voneinander verschieden. Zur Beantwortung der Frage, wann *drei verschiedene* reelle EW vorliegen, muss man noch prüfen, ob einer davon mit $\lambda_1 = 5$ übereinstimmt. Wir haben

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{1-\gamma} &= 5 \\ \pm\sqrt{1-\gamma} &= 4 \\ 1-\gamma &= 16 \\ \gamma &= -15. \end{aligned}$$

Offenbar ist im Falle $\gamma = -15$ tatsächlich $\lambda_2 = \lambda_1 = 5$.

Es liegen also genau dann drei verschiedene reelle EW vor, wenn $\gamma < 1$ *und* $\gamma \neq -15$ gilt.

(b) Zur Bestimmung der zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$ gehörigen Eigenvektoren müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A - 5E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen:

$$
\begin{array}{rrr|r}
0 & 2 & \boxed{1} & 0 \\
0 & -3 & -3 & 0 \\
0 & -1 & -5 & 0 \\
\hline
0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\
0 & 9 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Wir setzen die Nichtleitunbekannte $v_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$, und erhalten die allgemeine Lösung

$$\vec{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t\vec{v}_1, t \in \mathbb{R}.$$

Der EV $\vec{v}_1$ spannt also den Eigenunterraum zum EW $\lambda_1 = 5$ auf.

Zur Bestimmung der zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ gehörigen Eigenvektoren müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A + E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen:

$$
\begin{array}{rrr|r}
\boxed{6} & 2 & 1 & 0 \\
0 & 3 & -3 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 3 & -3 & 0 \\
0 & -1 & \boxed{1} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Wir setzen die Nichtleitunbekannte $v_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$, und erhalten die allgemeine Lösung

$$\vec{v} = t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t\vec{v}_2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{v}_2$ bildet also eine Basis des Eigenunterraums zum EW $\lambda_2 = -1$. Um Brüche zu vermeiden, können wir stattdessen auch den Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ nehmen, da ein Vielfaches eines EV stets wieder ein EV zum selben EW ist.

Zur Bestimmung der zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$ gehörigen Eigenvektoren müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A - 3E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen:

$$
\begin{array}{rrr|r}
\boxed{2} & 2 & 1 & 0 \\
0 & -1 & -3 & 0 \\
0 & -1 & -3 & 0 \\
\hline
0 & \boxed{-1} & -3 & 0 \\
0 & -1 & -3 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Wir setzen die Nichtleitunbekannte $v_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, und erhalten die allgemeine Lösung

$$\vec{v} = t \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = t\vec{v}_3, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{v}_3$ bildet also eine Basis des Eigenunterraums zum EW $\lambda_3 = 3$. Um Brüche zu vermeiden, können wir stattdessen auch den Vektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ nehmen.

(c) Da für alle EW die geometrische mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt (alle Vielfachheiten sind gleich 1), ist A diagonalisierbar.

Bildet man die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

aus den drei linear unabhängigen EV und die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

aus den dazugehörigen EW in entsprechender Reihenfolge, so gilt $B^{-1}AB = D$ oder äquivalent $AB = BD$.

Aufgabe 2: Es sei $f_a(x,y) = 3x^2 - x^3 - \dfrac{2ay^2}{1+x}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
(8 P.)

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die lokalen Extremalstellen dieser Funktion in Abhängigkeit von a.

(b) Geben Sie für $a = \frac{1}{2}$ die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion im Punkt $(1, 2)$ an.

Lösung:

(a) Die einzige Einschränkung des Definitionsbereichs wird hier dadurch bestimmt, dass der Nenner nicht Null werden darf, die Funktion ist also definiert für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq -1$.

Zur Extremwertbestimmung suchen wir zunächst stationäre Stellen, d. h. solche, in denen die *notwendigen Extremalbedingungen* $(f_a)_x(x,y) = (f_a)_y(x,y) = 0$ erfüllt sind:

$$(f_a)_x(x,y) = 6x - 3x^2 + \frac{2ay^2}{(1+x)^2} = 0 \tag{1}$$

$$(f_a)_y(x,y) = -\frac{4ay}{1+x} = 0. \tag{2}$$

Da $a \neq 0$, folgt aus (2) sofort $y = 0$. Einsetzen in (1) liefert

$$6x - 3x^2 = 3x(2-x) = 0$$

mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$, so dass sich die beiden stationären Punkte

$$P_1 = (0,0)\,, \qquad P_2 = (2,0)$$

ergeben.

Wir prüfen in den stationären Punkten die *hinreichenden Extremalbedingungen* mittels der Hesse-Matrix. Dafür benötigen wir die partiellen Ableitungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
(f_a)_{xx}(x,y) &= 6 - 6x - \frac{4ay^2}{(1+x)^3} \\
(f_a)_{xy}(x,y) &= \frac{4ay^2}{(1+x)^2} = (f_a)_{yx}(x,y) \\
(f_a)_{yy}(x,y) &= -\frac{4a}{1+x}.
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Hesse-Matrix $H_{f_a}(x,y) = \begin{pmatrix} (f_a)_{xx}(x,y) & (f_a)_{xy}(x,y) \\ (f_a)_{xy}(x,y) & (f_a)_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$.

Im stationären Punkt $P_1 = (0,0)$ haben wir $H_{f_a}(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4a \end{pmatrix}$. Wir untersuchen diese Matrix auf Definitheit. Für die führenden Hauptminoren gilt $D_1 = (f_a)_{xx}(0,0) = 6 > 0$ und $D_2 = \det H_{f_a}(0,0) = -24a$.

- Im Falle $a < 0$ ist die Hesse-Matrix positiv definit, und in P_1 liegt ein Minimum mit dem Funktionswert $f_a(0,0) = 0$ vor.
- Im Falle $a > 0$ haben wir $\det H_{f_a}(0,0) < 0$. Bei einer 2×2-Matrix folgt daraus, dass diese indefinit ist, folglich liegt dann in P_1 kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Im stationären Punkt $P_2 = (2,0)$ gilt $H_{f_a}(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -\frac{4a}{3} \end{pmatrix}$, also $D_1 = -6 < 0$ und $D_2 = 8a$.

- Im Falle $a > 0$ ist die Hesse-Matrix negativ definit, und in P_2 liegt ein Maximum mit dem Funktionswert $f_a(2,0) = 4$ vor.
- Im Falle $a < 0$ haben wir $\det H_{f_a}(2,0) < 0$, die Hesse-Matrix ist also indefinit, und in P_2 liegt ein Sattelpunkt vor.

(b) Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von $f_{1/2}$ im Punkt $(1,2)$ lautet

$$\begin{aligned}
z &= f_{1/2}(1,2) + (f_{1/2})_x(1,2)(x-1) + (f_{1/2})_y(1,2)(y-2) \\
&= 0 + 4(x-1) - 2(y-2) = 4x - 2y.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Ermitteln Sie mit der Lagrange-Methode die stationären Stellen der Funktion
(6 P.)

$$f(x,y) = 2x + 2y - 7$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 8 = 0.$$

Skizzieren Sie die durch die Nebenbedingung beschriebene Kurve sowie mindestens 3 Niveaulinien von f, darunter alle, die durch die stationären Stellen verlaufen.

Untersuchen Sie, ob in den gefundenen stationären Stellen tatsächlich Extrema vorliegen und ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.

Lösung:

Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 2x + 2y - 7 + \lambda \left(x^2 + (y-1)^2 - 8\right).$$

Notwendig für ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung sind die Bedingungen

$$L_x(x, y, \lambda) = L_y(x, y, \lambda) = L_\lambda(x, y, \lambda) = 0,$$

wir haben also das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$2 + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$2 + 2\lambda(y-1) = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + (y-1)^2 - 8 = 0. \tag{3}$$

Variante 1: Wir stellen (1) nach x und (2) nach y um und erhalten

$$x = -\frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad y = 1 - \frac{1}{\lambda}. \tag{4}$$

(Man sieht sofort, dass beide Gleichungen für $\lambda = 0$ nicht erfüllt sind, so dass dieser Fall ausgeschlossen werden kann.) Einsetzen von (4) in (3) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} &= 8 \\ \lambda^2 &= \frac{1}{4} \\ \lambda_{1,2} &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aus (4) ergeben sich damit die beiden extremwertverdächtigen Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (-2, -1)$.

Variante 2: Wir stellen (1) nach λ um und erhalten

$$\lambda = -\frac{1}{x}. \tag{5}$$

(Man sieht sofort, dass (1) für $x = 0$ nicht erfüllt ist, so dass dieser Fall ausgeschlossen werden kann.)

Einsetzen von (5) in (2) ergibt $2 - \dfrac{2(y-1)}{x} = 0$ und somit

$$y = 1 + x. \tag{6}$$

Setzen wir (6) in (3) ein, erhalten wir

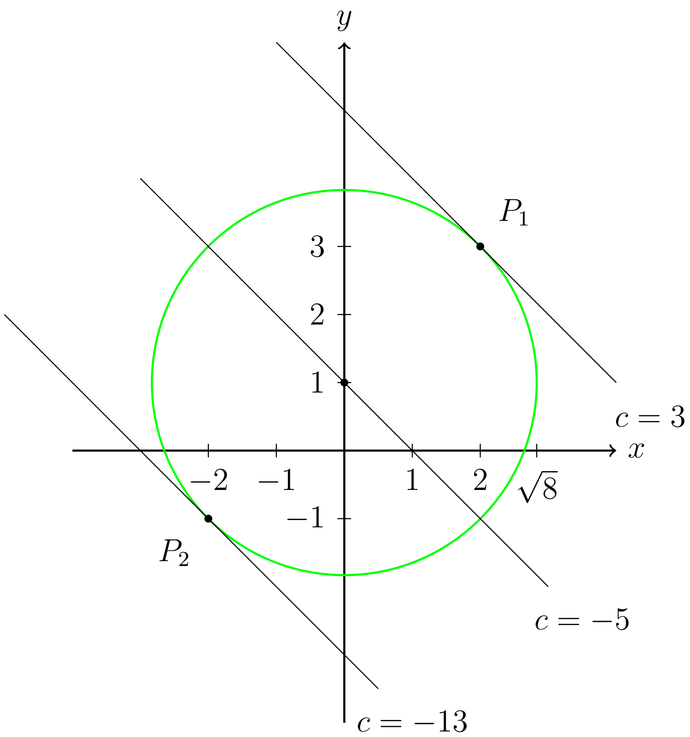
$$\begin{aligned} 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x_{1,2} &= \pm 2. \end{aligned}$$

Mit (6) ergeben sich daraus wiederum die obigen extremwertverdächtigen Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (-2, -1)$.

(Analog kann man auch zuerst (2) nach λ umstellen und die entstehende Beziehung $\lambda = -\frac{1}{y-1}$ in (1) einsetzen, wodurch sich ebenfalls (6) ergibt.)

Die Nebenbedingung beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt (0,1) und dem Radius $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.8$.

Die Niveaulinien von f erfüllen Gleichungen der Form $f(x, y) = 2x + 2y - 7 = c$ bzw. $y = -x + \dfrac{c+7}{2}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dies beschreibt eine Schar von zueinander parallelen Geraden mit dem Anstieg -1. Der auf der Niveaulinie angenommene Funktionswert c ist dabei um so größer, je weiter oben die Gerade liegt. In der Skizze sind die Niveaulinien zu den Werten $c = f(P_1) = 3$, $c = f(P_2) = -13$ und $c = -5$ eingezeichnet.



Offenbar verläuft durch P_1 die am weitesten oben gelegene Niveaulinie von f, die den Kreis $g(x, y) = 0$ schneidet oder berührt. Durch alle in einer Umgebung von P_1 gelegenen Punkte des Kreises $g(x, y) = 0$ verlaufen Niveaulinien mit einem kleineren Wert als $f(P_1) = 3$, da diese Geraden weiter unten liegen würden. In P_1 liegt daher ein lokales (sogar das globale) Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ vor.

Analog liegt im Punkt P_2 das (sogar globale) Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Aufgabe 4: **(9 P.)** (a) (i) Untersuchen Sie die folgende Differentialgleichung auf Exaktheit:

$$2xy\cos(x^2y) + x^2\cos(x^2y) \cdot y'(x) = 0.$$

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der unter (i) gegebenen Dgl. (es genügt die Ermittlung der Lösung in impliziter Form).

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 18x + 15.$$

Lösung:

(a) Wir haben eine Differentialgleichung der Form $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y'(x) = 0$, hier mit $P(x,y) = 2xy\cos(x^2y)$ und $Q(x,y) = x^2\cos(x^2y)$. Eine Dgl. dieser Form heißt *exakt*, wenn es eine *Stammfunktion* $F(x,y)$ gibt mit $F_x = P$ und $F_y = Q$.

Notwendig für die Exaktheit ist die *Integrabilitätsbedingung* $P_y = Q_x$ im betrachteten Gebiet. Vorliegend sind P und Q im gesamten $\mathbb{R}^2$ definiert, der ein einfach zusammenhängendes Gebiet darstellt. In diesem Falle ist die Integrabilitätsbedingung auch hinreichend für die Exaktheit der Dgl.

Prüfung der Integrabilitätsbedingung ergibt hier (Produkt- und Kettenregel) tatsächlich $P_y = 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y) = Q_x$, damit die die Dgl. exakt.

Bekanntlich kann sich die Eigenschaft einer Dgl., exakt bzw. nicht exakt zu sein, ändern, wenn beide Seiten der Gleichung mit einem Faktor multipliziert werden (Stichwort: „integrierender Faktor"), auch wenn die entstehende Dgl. zur ursprünglichen äquivalent ist. Dieses Vorgehen ist daher zur Beantwortung der Frage nach der Exaktheit eigentlich nicht sachgerecht.

In der Tat: Wenn man beide Seiten der gegebenen Dgl. durch $x\cos(x^2y)$ dividiert (wobei eigentlich zu klären wäre, ob das Ergebnis äquivalent ist, da man dabei die Fälle ausschließen muss, in denen durch 0 dividiert würde), erhält man eine Dgl. der Form $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y'(x) = 0$ jetzt mit $P(x,y) = 2y$ und $Q(x,y) = x$, wobei $P_y = 2 \neq Q_x = 1$ gilt, so dass diese Dgl. nicht exakt ist. Bei der Korrektur wurde dieses Vorgehen aber nicht beanstandet.

(b) Wir ermitteln eine Stammfunktion $F(x,y)$, am besten mit der in der Vorlesung so genannten „Ansatzmethode":

$$F_x(x,y) = P(x,y) = 2xy\cos(x^2y) \Longrightarrow F(x,y) = \int 2xy\cos(x^2y)\,\mathrm{d}x$$

$$\underset{\substack{t=x^2y,\\ \mathrm{d}t=2xy\,\mathrm{d}x}}{=} \int \cos(t)\,\mathrm{d}t = \sin(t) + c(y) = \sin(x^2y) + c(y).$$

($c(y)$: Ansatz für die von y abhängige Integrationskonstante). Ableiten nach y liefert

$$F_y(x,y) = x^2\cos(x^2y) + c'(y) = Q(x,y) = x^2\cos(x^2y)$$

$$\Longrightarrow c'(y) = 0 \Longrightarrow c(y) = d$$

mit einer Konstanten $d \in \mathbb{R}$.

Die Stammfunktionen haben also alle die Gestalt $F(x,y) = \sin(x^2y) + d$, $d \in \mathbb{R}$.

Wählen wir irgendeine dieser Stammfunktionen (z. B. für $d = 0$), so ergibt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung implizit durch

$$F(x,y) = \sin(x^2y) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) Dies ist eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als erstes bestimmen wir die Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung mit Hilfe des λ-Ansatzes. Wir bestimmen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$
$$\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = 3,$$

wir haben also eine doppelte reelle Nullstelle. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist damit

$$y_h(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 x \mathrm{e}^{3x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Da es eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist, kann eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite bestimmt werden. Da die rechte Seite ein Polynom vom Grad 1 ist und kein Resonanzfall vorliegt (das sieht man daran, dass man die rechte Seite in der Form $\mathrm{e}^{0x}\cos(0x)(18x+15)$ schreiben kann und die Zahl $0+0\mathrm{i}$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist), lautet der Ansatz:

$$y_s(x) = Ax + B$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten A, B. Dazu setzen wir $y_s(x)$ und seine Ableitungen in die inhomogene Differentialgleichung ein. Die Ableitungen sind

$$y_s'(x) = A, \quad y''(x) = 0.$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} y_s'' - 6y_s' + 9y_s &= -6A + 9Ax + 9B \\ &= 9Ax + (-6A + 9B) = 18x + 5. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} 9A = 18 &\iff A = 2, \\ -6A + 9B = -12 + 9B = 15 &\iff B = 3. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist deshalb

$$y(x) = y_s(x) + y_h(x) = 2x + 3 + C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 x \mathrm{e}^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5: Gegeben seien ein Kraftfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine Kurve $\vec{\gamma} : [2,4] \to \mathbb{R}^3$ mit
(8 P.)

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xz - y^3 \\ z^2 - 3xy^2 \\ x^2 - 2 + 2yz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\gamma}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - 1 \\ 1 - \frac{1}{2}t \\ t^{3/2} \end{pmatrix}, \quad 2 \le t \le 4.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}(\vec{x})$ ein konservatives Feld ist und bestimmen Sie eine dazugehörige Stammfunktion $F(\vec{x})$.

(b) $W = \displaystyle\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ ist die Arbeit, die beim Durchlaufen des Kraftfeldes $\vec{v}(\vec{x})$ entlang der Kurve $\vec{\gamma}$ verrichtet wird. Begründen Sie die Wegunabhängigkeit des Integrals und bestimmen Sie W.

Lösung:

(a) Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist im $\mathbb{R}^3$ definiert, d. h. in einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet. Damit ist $\vec{v}$ konservativ genau dann, wenn in ganz $\mathbb{R}^3$ die *Integrabilitätsbedingungen* gelten. Diese sind hier offensichtlich erfüllt, denn wir haben

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} = -3y^2,$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x} = 2x,$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial y} = 2z,$$

wobei die Komponenten von $\vec{v}$ mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet wurden.

Äquivalent dazu ist die Überprüfung der Bedingung

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz - y^3 & z^2 - 3xy^2 & x^2 - 2 + 2yz \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - 2z \\ 2x - 2x \\ -3y^2 + 3y^2 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

wobei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ die natürlichen Basisvektoren bezeichnen.

Wir verwenden nun die „Ansatzmethode“ zur Bestimmung einer Stammfunktion f. Für diese muss gelten:

$$f_x = v_1 = 2xz - y^3, \tag{7}$$
$$f_y = v_2 = z^2 - 3xy^2, \tag{8}$$
$$f_z = v_3 = x^2 - 2 + 2yz. \tag{9}$$

Integration ergibt

(i) $f(x,y,z) \underset{(7)}{=} \displaystyle\int (2xz - y^3)\,\mathrm{d}x = x^2z - xy^3 + c(y,z)$ (beachte die von y und z abhängige Integrationskonstante).

(ii) Ableiten nach y liefert $f_y(x,y,z) = -3xy^2 + c_y(y,z) \underset{(8)}{=} z^2 - 3xy^2$. Daraus folgt $c_y(y,z) = z^2$ und somit $c(y,z) = \displaystyle\int z^2\,\mathrm{d}y = yz^2 + d(z)$.

(iii) Ableiten von $f(x,y,z) = x^2z - xy^3 + yz^2 + d(z)$ nach z ergibt

$$f_z(x,y,z) = x^2 + 2yz + d'(z) \underset{(9)}{=} x^2 - 2 + 2yz.$$

Es folgt $d'(z) = -2$ und somit $d(z) = -2z$ (die letzte Integrationskonstante kann 0 gesetzt werden, da nur *eine* Stammfunktion gesucht ist).

Eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist folglich gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2z - xy^3 + yz^2 - 2z.$$

(b) Da im vorliegenden Fall das Vektorfeld $\vec{v}$ konservativ ist, ist das Kurvenintegral wegunabhängig. Daher berechnet man dieses am besten als Differenz von obiger Stammfunktion f an Endpunkt und Anfangspunkt der Kurve:

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= f(\vec{\gamma}(4)) - f(\vec{\gamma}(2)) \\ &= f(1,-1,8) - f(0,0,2\sqrt{2}) = -71 + 4\sqrt{2} \approx -65.34\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Der (Teil-)Zylinder
(7 P.)

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{mit} \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

werde von oben durch die Ebene

$$2x + y + z - 4 = 0$$

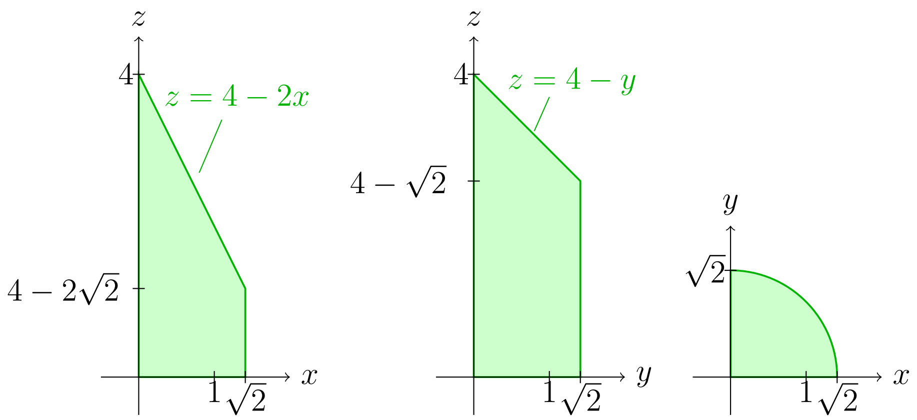
begrenzt.

(a) Skizzieren Sie die Schnitte des Körpers mit der x-z-Ebene, der y-z-Ebene und der x-y-Ebene in je ein Koordinatensystem (Skalierung und Beschriftung der Achsen sowie Schraffur der Schnittfläche des Körpers werden gefordert).

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers. (Hinweis: Die Verwendung kartesischer Koordinaten wird nicht empfohlen.)

Lösung:

(a)



(b) In Zylinderkoordinaten ergibt sich die folgende Beschreibung des Körpers (im Folgenden mit K bezeichnet):

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} &0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ &0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ &0 \leq z \leq 4 - 2r\cos\varphi - r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante ist $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = r$. Damit erhalten wir zur Bestimmung des Volumens des Körpers folgendes Integral:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_K \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{4-2r\cos\varphi - r\sin\varphi} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} rz\Big|_{z=0}^{4-2r\cos\varphi-r\sin\varphi}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} r(4-2r\cos\varphi - r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(2r^2 - \frac{2r^3}{3}\cos\varphi - \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_{r=0}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(4 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\varphi - \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \left(4\varphi - \frac{4\sqrt{2}}{3}\sin\varphi + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_{\varphi=0}^{\pi/2} \\
&= 2\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\pi - 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Da K ein Körper über einem ebenen Bereich ist, kann man das Volumen auch als zweidimensionales Bereichsintegral über der Grundfläche des Körpers in der x-y-Ebene auffassen, wobei die zu integrierende Funktion dann $z = f(x,y) = 4-2x-y$ wäre (obere Begrenzungsfläche des Körpers). In Polarkoordinaten würde dann der Integrationsbereich B durch

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \qquad \text{mit} \qquad & 0 &\le r \le \sqrt{2} \\
y &= r\sin\varphi & 0 &\le \varphi \le \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

beschrieben, wobei die Funktionaldeterminante gleich $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$ wäre. Zu berechnen wäre das Integral $V = \iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$, die Berechnung in Polarkordinaten stimmt mit der obigen ab der 3. Zeile überein.

Zusatz-aufgabe: **(3 P.)**

Gegeben sei eine ebene Kurve in impliziter Form durch

$$f(x,y) = y(x^2-y)+1 = 0, \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Kurvenpunkte (x,y) mit horizontaler Tangente.

(b) Für welche Kurvenpunkte ist die eindeutige lokale Auflösbarkeit der Kurvengleichung garantiert?

Lösung:

(a) Horizontale (waagerechte) Tangenten liegen vor unter den Bedingungen

$$f_x = 2xy \qquad = 0 \quad \text{und} \tag{10}$$
$$f_y = x^2 - 2y \ne 0. \tag{11}$$

Aus (10) folgt $x = 0$ *oder* $y = 0$.

- Im Falle $x = 0$ ergibt sich durch Einsetzen in die Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} -y^2 + 1 &= 0 \\ y &= \pm 1. \end{aligned}$$

Die Punkte $(0, 1)$ und $(0, -1)$ erfüllen auch (11), sind also Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente.

- Im Falle $y = 0$ sehen wir, dass die Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ nicht erfüllt ist (es gilt $f(x, 0) = 1 \neq 0$ für beliebige x), so dass sich dadurch keine weitere Lösung ergibt.

(b) Die eindeutige lokale Auflösbarkeit nach y ist *nicht* garantiert, wenn

$$f_y(x, y) = x^2 - 2y = 0$$

gilt. Umstellen ergibt die Beziehung

$$y = \frac{x^2}{2}. \tag{12}$$

Da es nur um Punkte auf der Kurve $f(x, y) = 0$ geht, müssen wir (12) in die Kurvengleichung einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2}\left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) + 1 &= 0 \\ \frac{x^4}{4} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Da stets $x^4 \geq 0$ gilt, ist diese Bedingung nie erfüllt. Die Kurvengleichung ist also in *allen* Kurvenpunkten eindeutig lokal nach y auflösbar.