Musterlösung zur Klausur "Mathematik für Ingenieure" vom 21.02.2022

Auswahlaufgaben. Bei den ersten 15 Aufgaben sind keine Begründungen gefragt, Bemerkungen und Erklärungen werden jedoch bei der Bewertung berücksichtigt. Es können jeweils keine, eine, zwei oder alle drei Antwortmöglichkeiten richtig sein. Jede dieser Aufgaben wird für sich getrennt gewertet. Sind in einer Aufgabe alle drei Kästchen korrekt markiert, so gibt es für die Aufgabe einen Punkt. Ist höchstens ein Kästchen falsch markiert, gibt es einen halben Punkt. Sind zwei oder alle Kästchen falsch markiert, so gibt es keinen Punkt.

Aufgabe 1: Welche der Matrizen haben einen Eigenwert 0?

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Welche der Matrizen beschreiben eine Spiegelung an der xz-Ebene?

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

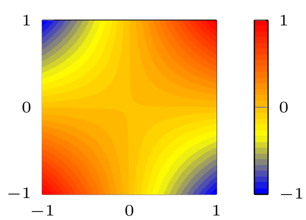
Aufgabe 3: Welche der Aussagen sind richtig?

☒ $\vec{v} = \vec{0}$ ist niemals ein Eigenvektor.

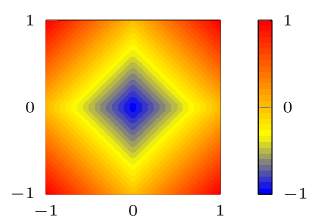
☐ $\lambda = 0$ ist niemals ein Eigenwert.

☒ Jede quadratische Matrix hat mindestens einen Eigenwert.

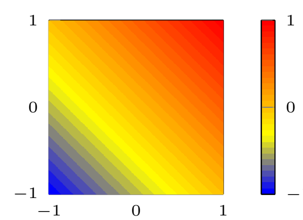
Aufgabe 4: Welche der Abbildungen beschreibt die Funktion $f(x, y) = x \cdot y$?



☒

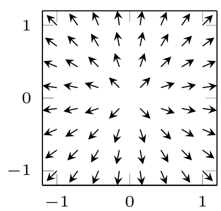


☐

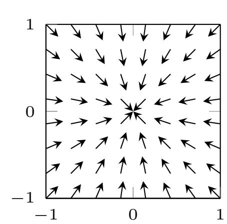


☐

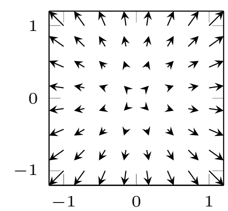
Aufgabe 5: Welche der Abbildungen ist das Gradientenfeld der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$?



☐



☐



☒

Aufgabe 6: Welche der Kurven $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ beschreiben die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$?

☐ $\gamma(t) = \vec{x} + t\vec{y}$ ☒ $\gamma(t) = t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$ ☒ $\gamma(t) = \vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x})$

Aufgabe 7: Für jede Höhenlinie $\gamma\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$ einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

☐ $\nabla f(\gamma(t)) = \vec{0}$ ☒ $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$ ☒ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\gamma(t)) = 0$

Aufgabe 8: Sei $f(x,y,z) = x + y + z$ und $\vec{g}(u) = (1, u, u^2)^\top$. Dann gilt für die Ableitung $Dh(u)$ der Funktion $h(u) = f(\vec{g}(u))$ im Punkt $u \in \mathbb{R}$

☐ $Dh(u) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ☐ $Dh(u) = (0, 1, 2u)^\top$ ☒ $Dh(0) = 1$

Aufgabe 9: Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Welche der Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_f(\vec{x})$ garantieren ein lokales Maximum in dem kritischen Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$

☐ $\mathbf{H}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\mathbf{H}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ☒ $\mathbf{H}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10: Welche der Differenzialgleichungen sind separabel?

☐ $y'(t) = y(t) + t$ ☒ $y'(t) = y(t) \cdot t$ ☒ $y'(t) = y(t) \cdot t + t$

Aufgabe 11: Welche der Differenzialgleichungen sind linear?

☒ $y''(t) = ty'(t) + y(t)$ ☐ $y''(t) = y(t)y'(t) + t$ ☒ $y''(t) = t + y'(t) + y(t)$

Aufgabe 12: Welche der Anfangswertprobleme haben eine eindeutige Lösung?

☐ $y''(t) = y(t),\ y(0) = 0$ ☒ $y'(t) = y(t),\ y(0) = 0$ ☒ $y'(t) = 1,\ y(0) = 0$

Aufgabe 13: Die Differenzialgleichung $y''(t) = \sin(t)\, y(t) + \cos(t)\, y'(t)$ ist

☐ inhomogen ☐ nichtlinear ☐ von erster Ordnung

Aufgabe 14: Welche der Vektorfelder $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ besitzen eine Stammfunktion?

☒ $\vec{f}(x,y) = (x,y)^\top$ ☒ $\vec{f}(x,y) = (y,x)^\top$ ☐ $\vec{f}(x,y) = (xy, xy)^\top$

Aufgabe 15: Mit welchen der Integrale wird die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über den Einheitskreis $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ integriert?

☒ $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ ☐ $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ ☒ $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$

Bei den folgenden Aufgaben ist der komplette Lösungsweg anzugeben!

Aufgabe 16: Die Matrix 4 Punkte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Spiegelung gefolgt von einer Skalierung mit dem Skalierungsfaktor a.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Bestimmen Sie den Normalenvektor der Spiegelebene sowie den Skalierungsfaktor a.

Lösung 16:

a) Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(A - \lambda \mathrm{I}) \\ &= (-3-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda) - 16(5-\lambda) \\ &= ((-3-\lambda)(3-\lambda) - 16)(5-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

An dieser Stelle lässt sich schlussfolgern, dass der erste Eigenwert $\lambda_1 = 5$ ist. Es bleibt

$$\begin{aligned} (-3-\lambda)(3-\lambda) - 16 &= 0 \\ \lambda^2 - 25 &= 0 \\ \lambda_{2/3} &= \pm\sqrt{25} \\ &= \pm 5. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5$ und $\lambda_3 = -5$.

b) Skalierungsfaktor: Eine Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ hat die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Hier gilt für die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 5$ und $\lambda_3 = -5$, damit ergibt sich für den Skalierungsfaktor $a = 5$.
(Alternativ: Die Determinante einer Spiegelmatrix ist -1. Bei der Skalierung mit dem Skalierungsfaktor a erhalten wir die Matrix $A = a \cdot S$ und es gilt

$$\det(A) = \det(a \cdot S) = a^3 \cdot \det(S) = -a^3.$$

Aus $\det(A) = -125$ folgt deshalb $a = 5$.)

Normalenvektor: Der Normalenvektor der Spiegelebene ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = -5$. Es muss also folgendes Gleichungssystem gelöst werden: $(A -$

$\lambda_3 \mathrm{I})\vec{v} = (A + 5\mathrm{I})\vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ \hline \boxed{2} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}$$

Es ergibt sich der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor der Spiegelebene.

Aufgabe 17: Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = \ln(x + y) - y^3 + \sqrt{xy}$. 5 Punkte

a) Berechnen Sie den Anstieg von f im Punkt $(x, y) = (1, 1)$ in Richtung $\vec{v} = (-3, 4)^\top$.

b) Wie groß ist der maximale Anstieg im Punkt $(1, 1)$?

c) In welche Richtung $\vec{r}$ rollt eine Kugel, die man im Punkt $(1, 1)$ auf dem Graph ablegt?

Lösung 17:

a) Wir berechnen den Gradienten im Punkt $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{x+y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} && \Rightarrow f_x(1,1) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 \\ f_y &= \frac{1}{x+y} - 3y^2 + \frac{x}{2\sqrt{xy}} && \Rightarrow f_y(1,1) = \tfrac{1}{2} - 3 + \tfrac{1}{2} = -2 \end{aligned}$$

Damit folgt $\nabla f(1, 1) = (1, -2)^T$.

Mit $|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ erhalten wir die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f(1,1) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{11}{5}.$$

b) maximaler Anstieg in $(1, 1)$: $|\nabla f(1, 1)| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

c) Kugel rollt in Richtung des steilsten Abstieges, d.h. $\vec{r} = -\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 18: Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 7 Punkte

$$f(x,y) = x^3 - 6x + x^2 + 2xy + y^2.$$

a) Berechnen Sie alle Punkte (x,y) mit $\nabla f(x,y) = \vec{0}$.

b) Untersuchen Sie mithilfe der Hesse-Matrix von f, ob es sich bei diesen stationären Punkten um lokale Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

c) Wir betrachten die Funktion f jetzt nur auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $P = (-3,-3)$ und $Q = (3,3)$. Wo nimmt sie dort ihr Minimum an?

Lösung 18:

a) Berechnen und Nullsetzen des Gradienten liefert

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6 + 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\ .$$

Umstellen der Gleichung (2) nach y führt auf $2x + 2y = 0 \Leftrightarrow\ y = -x$. Dies setzen wir in Gleichung (1) ein und erhalten

$$3x^2 - 6 + 2x + 2 \cdot (-x) = 3x^2 - 6 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

Wir ziehen die Wurzel und erhalten die beiden Nullstellen $x_1 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$. Die zugehörigen y-Werte berechnen wir einfach über $y = -x$ und somit erhalten wir die folgenden 2 stationären Punkte:

$$P_1 = (x_1, y_1) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \quad P_2 = (x_2, y_2) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right).$$

b) Zunächst berechnen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{y,x}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist also

$$\det\left(H_f(x,y)\right) = (6x+2) \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 12x + 4 - 4 = 12x.$$

Um zu entscheiden ob ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vorliegt, müssen wir die Definitheit der Hesse-Matrix in P_1 und P_2 untersuchen, siehe Folie $33-35$ aus dem Skript zur Differentialrechnung. Für $x_1 = -\sqrt{2}$ ist die Determinante negativ, also ist $H_f(P_1)$ indefinit, also liegt in P_1 ein Sattelpunkt vor. Für $x_2 = \sqrt{2}$ ist die Determinante positiv und $a_{11} = 6\sqrt{2}$ ist positiv, also ist die Hesse-Matrix positiv definit und in P_2 liegt ein Minimum vor.

c) Auf der Verbindungsstrecke gilt $x = y$, wobei x nur das Interval $[-3, 3]$ durchläuft. Einsetzen in die Zielfunktion f liefert

$$g(x) := f(x,x) = x^3 - 6x + x^2 + 2x^2 + x^2 = x^3 + 4x^2 - 6x.$$

An den Intervallgrenzen sind die Funktionswerte $g(-3) = f(-3,-3) = 27$ und $g(3) = f(3,3) = 45$.

Wir betrachten jetzt noch das Innere des Intervalls. Die Ableitung von g ist $g'(x) = 3x^2 + 8x - 6$. Nullsetzen ergibt

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{8}{3} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{18}{9}} = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{3}.$$

Nur die Nullstelle $x_2 = \frac{-4+\sqrt{34}}{3} \approx 0.61$ liegt im Intervall $[-3, 3]$. Wegen $g''(x) = 6x+8$ liegt dort ein lokales Minimum mit Funktionswert $g(x_2) = f(x_2, x_2) \approx 1.94$ vor. Dieser Funktionswert ist kleiner als an den Rändern, also ist dieses lokale Minimum auch das globale Minimum auf der Verbindungsstrecke zwischen P und Q.

Aufgabe 19: Die zwei Geraden 7 Punkte

$$y = 2x + 8, \quad y = -\tfrac{1}{2}x + 3$$

und die x-Achse begrenzen ein Dreieck in der Ebene.

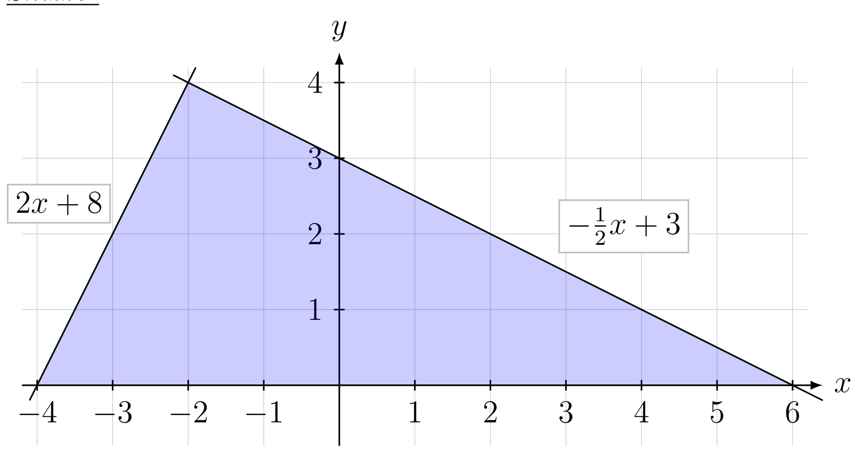
a) Beschreiben Sie das Dreieck als Normalbereich.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

c) Berechnen Sie unter Verwendung eines Doppelintegrals die x-Koordinate des Schwerpunktes des Dreieckes. Die y-Koordinate des Schwerpunktes muss nicht berechnet werden.

Lösung 19:

a) *Skizze:*



Wenn wir zuerst über x integrieren, erhalten wir als Normalbereich

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} - 4 \le x(y) \le 6 - 2y \\ 0 \le y \le 4. \end{aligned}$$

Wenn wir zuerst über y integrieren, unterteilen wir den Normalbereich in den linken und rechten Teil, d.h.

$$\begin{aligned} &0 \le y(x) \le 2x + 8 \qquad &&\text{und} \qquad &&0 \le y(x) \le -\frac{x}{2} + 3 \\ &-4 \le x \le -2 && &&-2 \le x \le 6 \end{aligned}$$

b) Wir verwenden den ersten Normalbereich und bestimmen das Integral

$$A = \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}-4}^{6y-2} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^4 6 - 2y - \frac{y}{2} + 4 \,\mathrm{d}y = 10y - \frac{5y^2}{4}\bigg|_0^4 = 40 - 20 = 20.$$

Alternativ können Sie den Flächeninhalt elementar berechnen.

c) Wir nutzen die Formel zur Berechnung des Schwerpunkts

$$(x_s, y_s) = \frac{1}{A}\left(\int_\Omega x \, dx \, dy, \int_\Omega y \, dx \, dy\right).$$

Für die Schwerpunktkoordinate x_s ergibt sich damit

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{20}\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}-4}^{6-2y} x \, dx \, dy = \frac{1}{40}\int_0^4 x^2\Big|_{\frac{y}{2}-4}^{6-2y} dy \\ &= \frac{1}{40}\int_0^4 36 - 24y + 4y^2 - \frac{y^2}{4} + 4y - 16 \, dy \\ &= \frac{1}{40}\left[20y - 10y^2 + \frac{5}{4}y^3\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{40}(80 - 160 + 5 \cdot 16) = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 20: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ der gewöhnlichen Differenzialgleichung 7 Punkte

$$y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 2\mathrm{e}^{3t}$$

sowie die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 3$, $y'(0) = 12$.

Lösung 20: Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wegen der Linearität ist die Lösung Summe aus einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Aufgrund der konstanten Koeffizienten kann man für die homogene Dgl.

$$y''(t) - 8y'(t) + 16y(t) = 0$$

den Ansatz $y_h(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ verwenden, λ ist dabei Nullstelle des charakteristischen Polynoms:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 \iff \lambda_{1,2} = 4.$$

Da wir eine *doppelte* reelle Nullstelle haben, ist auch $t\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Lösungsfunktion, folglich ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(t) = c_1\mathrm{e}^{4t} + c_2 t\mathrm{e}^{4t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man mit Hilfe des Ansatzes vom Typ der rechten Seite. Die rechte Seite ist ein Vielfaches von e^{3t}, der Ansatz lautet deshalb (kein Resonanzfall, da $\lambda = 3$ keine Nullstelle von $\chi(\lambda)$ ist)

$$y_s(t) = A\mathrm{e}^{3t}, \quad y_s'(t) = 3A\mathrm{e}^{3t}, \quad y_s''(t) = 9A\mathrm{e}^{3t}.$$

Einsetzen in die Differentialgeichung:

$$9A\mathrm{e}^{3t} - 24A\mathrm{e}^{3t} + 16A\mathrm{e}^{3t} = A\mathrm{e}^{3t} \overset{!}{=} 2\mathrm{e}^{3t}.$$

Der Koeffizientenvergleich bei e^{3t} ergibt $A = 2$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y_s(t) = 2\mathrm{e}^{3t}$$

und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = 2\mathrm{e}^{3t} + c_1\mathrm{e}^{4t} + c_2 t\mathrm{e}^{4t}, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung der allgemeinen Lösung ist

$$y'(t) = 6\mathrm{e}^{3t} + 4c_1\mathrm{e}^{4t} + c_2\mathrm{e}^{4t} + 4c_2 t\mathrm{e}^{4t}.$$

Die Anfangsbedingungen liefern daher das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccccccc} y(0) & = & 2 & + & c_1 & & & = & 3 \\ y'(0) & = & 6 & + & 4c_1 & + & c_2 & = & 12 \end{array}$$

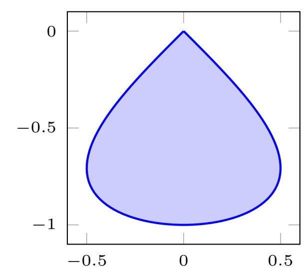
mit der Lösung $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Die Lösung des AWP ist also

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{4t} + 2t\mathrm{e}^{4t}.$$

Aufgabe 21 (Zusatzaufgabe): Berechnen Sie den Flächeninhalt F des Regentropfens $\vec{\Phi}(\Omega)$ welcher durch die Transformation 3 Punkte

$$\vec{\Phi}\colon [0,1]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^2,\ \vec{\Phi}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\ \cos\varphi\ \sin\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}$$

aus dem Rechteck $\Omega=[0,1]\times[0,\pi]$ hervorgeht.
Gehen Sie dazu wie folgt vor:



a) Bestimmen Sie den Betrag der Determinante $|\det \mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)|$ der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)$.

b) Berechnen Sie das Integral
$$F=\int_{\vec{\Phi}(\Omega)} 1\,\mathrm{d}(x,y)$$
mit Hilfe des Transformationssatzes, d.h. einer Koordinatentransformation von (x,y) zu (r,φ).

Lösung 21:

a) Zuerst berechnen wir die Jacobi-Matrix
$$\mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)=\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\varphi & r\cdot(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\\ 0 & -\cos\varphi\end{bmatrix}.$$
Die Determinante der Jacobi-Matrix lautet nun
$$\det \mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)=-\underbrace{\sin\varphi}_{\geq 0 \text{ in } [0,\pi]}\cdot\underbrace{\cos^2\varphi}_{\geq 0}.$$
Da $\sin\varphi\geq 0$ für $\varphi\in[0,\pi]$ gilt und $\cos^2\varphi$ immer positiv ist, gilt $\det \mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)\leq 0$. Damit erhalten wir den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix
$$|\det \mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)|=\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi.$$

b) Wir verwenden den Transformationssatz und führen eine Koordinatentransformation durch
$$\begin{aligned}F=\int_{\vec{\Phi}(\Omega)} 1\,\mathrm{d}(x,y)=\int_0^\pi\int_0^1 1\cdot|\det \mathbf{J}_{\vec{\Phi}}(r,\varphi)|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi&=\int_0^\pi\int_0^1 1\cdot\sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^\pi \sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$
Mit der Substitution $u=\cos\varphi$, d.h. $\mathrm{d}u=\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ erhalten wir
$$F=-\int_1^{-1} u^2\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}u^3\Big|_1^{-1}=\frac{2}{3}.$$