Studiengang:							**Matrikelnummer:**			
1	2	3	4	5	6	Z	Aufgaben	*Theorie*	Gesamt	**Note**

Prüfungsklausur zum Modul
Höhere Mathematik für Ingenieure 2

11. 2. 2019, 8.00 - 11.00 Uhr

- Aufgabenteil (180 min.) -

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, die vorgegebene *Tabelle von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln*, *Taschenrechner* (auch grafikfähig) aber **ohne** Computer-Algebra-System (CAS).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Das gilt insbesondere für auftretende Integrale, die durch Anwendung geeigneter Integrationsmethoden zu lösen sind. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: **(8 P.)** Gegeben sei die Matrix $A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit dem reellen Parameter c.

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $\vec{x} = (3, 0, 1)^T$ Eigenvektor von A_c? Geben Sie auch den dazugehörigen Eigenwert an.

(b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A_4 (d. h. im Fall $c = 4$) sowie jeweils eine Basis des dazugehörigen Eigenunterraums. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und die geometrische Vielfachheit an.

(c) Gibt es eine reguläre Matrix T so, dass $D = T^{-1}A_4T$ eine Diagonalmatrix ist? Wenn ja, geben Sie T und D an; wenn nicht, begründen Sie die Nichtexistenz.

Lösung:

(a) Der Vektor $\vec{x}$ ist genau dann EV von A_c, wenn es einen dazugehörigen EW λ gibt mit $A_c\vec{x} = \lambda\vec{x}$, d. h.

$$\begin{pmatrix} 3+c \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Aus dem Vergleich der dritten Komponenten ergibt sich der EW $\lambda = 4$, aus der ersten folgt dann $c = 9$.

(b) Zur Bestimmung der Eigenwerte betrachten wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A_4. Wir erhalten (Entwicklung nach 2. Zeile)

$$\begin{aligned}\det(A_4 - \lambda E) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 4\big) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0.\end{aligned}$$

Offenbar ist zunächst $\lambda_1 = -1$ eine Lösung, die verbleibende quadratische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ hat die Lösungen $1 \pm \sqrt{1+3}$, d. h. somit (geeignet nummeriert) $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 3$.

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_{1,2} = -1$ mit der algebraischen Vielfachheit 2 und $\lambda_3 = 3$ mit der algebraischen Vielfachheit 1.

Zur Bestimmung der zum EW $\lambda_{1,2} = -1$ gehörigen Eigenvektoren müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A_4 + 1 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Da nur in der ersten Spalte ein Leitelement auftritt, setzen wir die Variablen in den beiden anderen Spalten als freie Parameter $x_2 = s$, $x_3 = t$ an und erhalten durch Auflösen der Leitgleichung $x_1 = -2t$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$\vec{x} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: s\,\vec{v}_1 + t\,\vec{v}_2\, t \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenunterraum zu $\lambda_{1,2}$ wird somit von den beiden offenbar linear unabhängigen Vektor $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt, die damit eine Basis dieses Eigenunterraums bildet. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_{1,2} = 0$ ist daher 2, also gleich der algebraischen.

Zum EW $\lambda_3 = 3$ haben wir das homogene Gleichungssystem $(A_4 - 3 \cdot E)\vec{x} = \vec{0}$, also

$$\begin{array}{rrr|c} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & \boxed{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Mit dem freien Parameter $x_3 = t$ ergibt sich durch Auflösen der Leitgleichungen $x_2 = 0$ und $x_1 = 2t$, also die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: t\,\vec{v}_3,\ t \in \mathbb{R}.$$

Der Eigenunterraum zu λ_3 wird somit von $\vec{v}_3$ (Basisvektor des Eigenunterraums) aufgespannt, die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_3 ist also gleich 1.

(c) Da die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes mit der algebraischen übereinstimmt bzw. da es 3 linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A_4 gibt, ist A_4 diagonalisierbar. Mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(EV-Matrix und entsprechende Diagonalmatrix aus den EW) gilt $T^{-1}A_4T = D$.

Aufgabe 2: Es sei $f(x,y) := 16x^3 + 6xy - 2y^3$.
(9 P.)

(a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $P_0 = (1, -2)$.

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{v}$, für den die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ gleich Null ist.

(c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P_0 an die durch P_0 verlaufende Niveaulinie von f.

(d) Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen von f. Untersuchen Sie jeweils die Art des Extremums.

Lösung:

(a) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x = 48x^2 + 6y, \quad f_y = 6x - 6y^2$$

und damit der Gradient von f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(48x^2 + 6y, 6x - 6y^2\right)^T.$$

Die Tangentialebene im Punkt P_0 erhält man mit der Formel

$$\begin{aligned} T_f(P_0)(\vec{x}) &= f(P_0) + \operatorname{grad} f(P_0) \cdot (\vec{x} - P_0) \\ &= 20 + \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \\ &= 20 + 36(x-1) - 18(y+2) = -52 + 36x - 18y, \end{aligned}$$

wobei $\cdot$ als Skalarprodukt auszuwerten ist.

(b) Für einen *normierten* Vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)^T$ gilt $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \vec{v}$. Die Richtungsableitung wird also genau dann 0, wenn $\vec{v} \perp \operatorname{grad} f(P_0)$ ist. Daher muss für $\vec{v}$ gelten:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei dieses $\vec{v}$ *eine* mögliche Lösung ist (der entgegengesetzte Vektor wäre die andere). Anschaulich zeigt der Vektor $\vec{v}$ dann in Richtung der Niveaulinien der Funktion f.

(c) Da $f_y(P_0) = -18 \neq 0$, stellt die Niveaulinie

$$f(x,y) = f(P_0) = 20 \tag{1}$$

lokal (d. h. in der Nähe des Punktes P_0) eine durch (1) *implizit* gegebene Funktion einer Variablen $y = g(x)$ dar. Die Ableitung dieser Funktion berechnet sich mittels

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{8x^2+y}{x-y^2}.$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes P_0 liefert $g'(1) = 2$. Die Tangentengleichung an die Kurve $y = g(x)$ an der Stelle x_0 mit dem Funktionswert $y_0 = g(x_0)$ hat die Gestalt

$$y = y_0 + g'(x_0)(x - x_0) = -2 + 2(x-1) = 2x - 4,$$

wobei x_0, y_0 die Koordinaten des Kurvenpunktes P_0 sind.

(d) Wir setzen $\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0}$ und erhalten als notwendige Extremalbedingungen

$$48x^2 + 6y = 0 \iff 8x^2 + y = 0 \tag{1}$$
$$6x - 6y^2 = 0 \iff x - y^2 = 0. \tag{2}$$

(2) ergibt $x = y^2$, Einsetzen in (1) liefert $8y^4 + y = y(8y^3+1) = 0$. Ein Produkt ist genau dann 0, wenn ein Faktor 0 ist, also

(i) Fall 1: $y = 0$, dies liefert mit (2) auch $x = 0$.

(ii) Fall 2: $8y^3+1 = 0$ führt zu $y^3 = -\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ mit den Lösungen $y_k = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)\mathrm{i}}$, $k = 0,1,2$, uns interessiert dabei nur die einzige *reelle* Lösung $y_1 = -\frac{1}{2}$, mit (2) ergibt sich $x = \frac{1}{4}$.

Wir haben also die stationären Punkte $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

Die Art der stationären Punkte ermittelt man mit Hilfe der Hessematrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}.$$

Wir haben $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ mit der Determinante $\det H_f(P_1) = -36 < 0$, daher liegt in P_1 kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Weiter ist $H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$. Da $\det H_f(P_2) = 24 \cdot 6 - 6 \cdot 6 > 0$ und $f_{xx}(P_2) = 24 > 0$, ist $H_f(P_2)$ positiv definit, und in P_2 liegt ein lokales Minimum vor.

Aufgabe 3: **(8 P.)** Es sei $f(x,y) = x - y^2 - 3$.

(a) Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren alle Punkte, die die notwendigen Bedingungen für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) := (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0$ erfüllen.

(b) Zeichnen Sie die Kurve $g(x,y) = 0$. Skizzieren Sie einige Niveaulinien von f, darunter alle Niveaulinien durch die bei (a) gefundenen Punkte, und beschriften Sie sie mit dem dazugehörigen Funktionswert.

(c) Ermitteln Sie anhand des Niveaulinienbildes für alle unter (a) gefundenen Punkte, ob dort ein lokales oder sogar globales Maximum oder Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ vorliegt.

Lösung:

(a) Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = x - y^2 - 3 + \lambda \left((x-2)^2 + y^2 - 1 \right).$$

Notwendig für ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung sind die Bedingungen

$$L_x(x, y, \lambda) = L_y(x, y, \lambda) = L_\lambda(x, y, \lambda) = 0,$$

wir haben also das (nichtlineare) Gleichungssystem

$$1 + 2\lambda(x-2) = 0 \qquad (1)$$
$$-2y + 2\lambda y = 2y(\lambda - 1) = 0 \qquad (2)$$
$$(x-2)^2 + y^2 - 1 = 0. \qquad (3)$$

Am einfachsten beginnt man mit Gleichung (2): Ein Produkt ist genau dann 0, wenn ein Faktor 0 ist, also gilt $y = 0$ oder $\lambda = 1$.

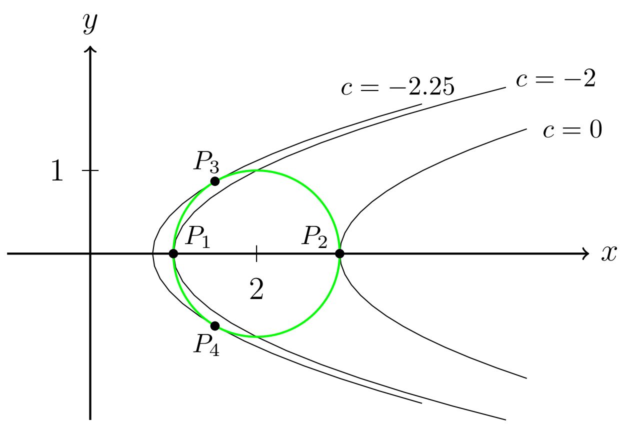
(i) Fall $y = 0$: Einsetzen in (3) ergibt $(x-2)^2 = 1$, somit $|x - 2| = 1$ und damit $x = 1$ oder $x = 3$. (Gleichung (1) wäre auch nach λ auflösbar, der Wert von λ ist aber hier uninteressant, da x und y bereits bestimmt sind.)

(ii) Fall $\lambda = 1$: Einsetzen in (1) liefert $1 + 2(x-2) = 0$, also $x = \frac{3}{2}$. Dies, in (3) eingesetzt, führt zu $\frac{1}{4} + y^2 = 1$ und somit $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Wir erhalten also die extremwertverdächtigen Stellen $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (3, 0)$, $P_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $P_4 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) Die Nebenbedingung wird von den Punkten (x, y) mit $(x-2)^2 + y^2 = 1$ erfüllt, dies beschreibt eine Kreislinie mit dem Mittelpunkt $(2, 0)$ und dem Radius 1.

Die Niveaulinien von f erfüllen Gleichungen der Form $f(x, y) = x - y^2 - 3 = c$ bzw. $x = y^2 + 3 + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dies beschreibt eine Schar von zueinander parallel verschobenen Parabeln, die symmetrisch zur x-Achse liegen. Der auf der Niveaulinie angenommene Funktionswert c ist dabei um so kleiner, je weiter links die Parabel liegt. In der Skizze sind die Niveaulinien zu den Werten $f(P_1) = -2$, $f(P_3) = f(P_4) = -2.25$ und $f(P_2) = 0$ eingezeichnet.



Offenbar verläuft durch P_2 die am weitesten rechts gelegene Niveaulinie, der dort angenommene Funktionswert 0 ist also das globale Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$. Die am weitesten links gelegene Niveaulinie durch den Kreis $g(x,y)=0$ verläuft durch die Punkte P_3 und P_4 – in diesen beiden Punkten wird daher mit dem Wert $f(P_3)=f(P_4)=-2.25$ das globale Minimum unter der Nebenbedingung angenommen. Durch alle in einer Umgebung von P_1 gelegenen Punkte des Kreises $g(x,y)=0$ verlaufen schließlich Niveaulinien mit einem kleineren Wert als $f(P_1)=-2$, da diese Parabeln weiter links liegen würden. In P_1 liegt daher ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung vor.

Aufgabe 4: **(6 P.)** Gegeben sei die ebene Kurve $\vec{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{R}$ durch $\vec{\gamma}(t)=\begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2+4t^2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Länge von $\vec{\gamma}$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\vec{\gamma}} \left(\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{8}\right)\,\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{2}-\frac{x}{6}\right)\,\mathrm{d}y\right)$.

(c) Ist das Kurvenintegral in (b) wegunabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir haben $\vec{\gamma}'(t)=\begin{pmatrix} 6t \\ 8t \end{pmatrix}$,

somit ist das skalare Bogenelement gleich $\mathrm{d}s=|\vec{\gamma}'(t)|\,\mathrm{d}t=\sqrt{36t^2+64t^2}\,\mathrm{d}t=10t\,\mathrm{d}t$.

Die Kurvenlänge ist dann

$$L=\int_{\vec{\gamma}}\mathrm{d}s=\int_0^1 10t\,\mathrm{d}t=10\,\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1=5.$$

(b) Wir haben $\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t=6t\,\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}y=y'(t)\,\mathrm{d}t=8t\,\mathrm{d}t$, für das gegebene Kurvenintegral 2. Art erhalten wir somit durch Einsetzen der Parametrisierung

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left(\left(t^2-\frac{1}{4}-\frac{t^2}{2}\right)6t+\left(1+2t^2-\frac{t^2}{2}\right)8t\right)\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\left(3t^3-\frac{3}{2}t+8t+12t^3\right)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\left(15t^3+\frac{13}{2}t\right)\,\mathrm{d}t\\
&=15\,\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1+\frac{13}{4}\,t^2\bigg|_0^1=7.
\end{aligned}$$

(c) Mit $P(x,y)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{8}$ und $Q(x,y)=\dfrac{y}{2}-\dfrac{x}{6}$ ist für die Wegunabhängigkeit die *Integrabilitätsbedingung* $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ zu überprüfen. Diese ist nicht erfüllt, da

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{8}\neq-\frac{1}{6}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

gilt. Das Kurvenintegral ist daher *nicht* wegunabhängig.

Aufgabe 5:
(8 P.)

(a) Gegeben sei die Differentialgleichung (Dgl.)

$$\left(2x + 2y - \frac{a}{2x - y}\right) \mathrm{d}x + \left(2x + 2y - \frac{1}{2x - y}\right) \mathrm{d}y = 0.$$

Berechnen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass dies eine exakte Dgl. ist, und bestimmen Sie anschließend die allgemeine Lösung dieser exakten Dgl. sowie die spezielle Lösung, die die Anfangsbedingung $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ erfüllt.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Dgl. $y''' = 4y'$.

(c) Überführen Sie die Dgl. aus (b) in ein Dgl.-system 1. Ordnung.

Lösung:

(a) Die Koeffizienten $P(x, y) = 2x + 2y - \dfrac{a}{2x - y}$ und $Q(x, y) = 2x + 2y - \dfrac{1}{2x - y}$ sind in jeder der beiden Halbebenen, in die die Ebene durch die Gerade $y = 2x$ (dort wird der Nenner 0) geteilt wird, definiert. Dies sind jeweils einfach zusammenhängende Gebiete. Die Differentialgleichung ist daher genau dann exakt, wenn die *Integrabilitätsbedingung* $P_y = Q_x$ erfüllt ist. (Wir betrachten die Dgl. im Folgenden wegen der Anfangsbedingung in derjenigen Halbebene, in der der Punkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ liegt.) Die Integrabilitätsbedingung lautet

$$P_y = 2 - \frac{a}{(2x - y)^2} \stackrel{!}{=} 2 + \frac{2}{(2x - y)^2} = Q_x,$$

was genau dann erfüllt ist, wenn $a = -2$ gilt. Dies wird im Folgenden vorausgesetzt.

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung im Falle $a = -2$ benötigen wir eine Stammfunktion F des Vektorfeldes $(P, Q)^T$, d. h. eine skalare Funktion F zweier Variabler, für die $F_x = P$ und $F_y = Q$ gilt. Wir ermitteln eine solche mit der *Ansatzmethode*: Zunächst erhalten wir durch Integration der ersten Gleichung bezüglich x

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int P(x, y) \,\mathrm{d}x = \int \left(2x + 2y + \frac{2}{2x - y}\right) \mathrm{d}x \\ &= x^2 + 2xy + \ln|2x - y| + c(y) \end{aligned}$$

Dabei ist $c(y)$ der Ansatz für die noch von y abhängige Integrationskonstante. Zu deren Bestimmung setzen wir den für $F(x, y)$ erhaltenen Ausdruck in $F_y = Q$ ein und bekommen

$$F_y(x, y) = 2x - \frac{1}{2x - y} + c'(y) \stackrel{!}{=} 2x + 2y - \frac{1}{2x - y},$$

woraus $c'(y) = 2y$ und nach Integration bezüglich y

$$c(y) = y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

folgt. (Man beachte, dass dieser Ausdruck tatsächlich nur von y abhängen darf, alles andere würde darauf hinweisen, dass die Differentialgleichung nicht exakt war oder man anderweitig einen Fehler gemacht hat.) Alle Stammfunktionen F sind somit von der Form $F(x, y) = x^2 + 2xy + \ln|2x - y| + y^2 + k = (x + y)^2 + \ln|2x - y| + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung der exakten Differentialgleichung wird nun implizit gegeben durch die Gleichung $F(x,y) = c_0$, wobei F Stammfunktion von $(P,Q)^T$ und $c_0 \in \mathbb{R}$ ist, also

$$F(x,y) = (x+y)^2 + \ln|2x-y| + k = c_0, \quad k, c_0 \in \mathbb{R},$$

oder, wenn wir k und c_0 auf eine Seite bringen und $c_0 - k$ zu einer neuen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ zusammenfassen,

$$(x+y)^2 + \ln|2x-y| = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangswerte $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ ergibt nun noch

$$\frac{1}{4} + \underbrace{\ln 1}_{=0} = c,$$

die Lösung des Anfangswertproblems ist also implizit gegeben durch

$$(x+y)^2 + \ln|2x-y| = \frac{1}{4}.$$

(b) Es handelt sich nach Umschreiben auf die Normalform $y''' - 4y' = 0$ (alle Summanden mit y auf eine Seite) um eine *homogene lineare Dgl.* mit *konstanten Koeffizienten*, daher führt hier der Ansatz $y_h = \mathrm{e}^{\lambda x}$ zum Ziel, wobei λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Dgl. sein muss, also

$$\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4) = 0.$$

Wir erhalten $\lambda_1 = 0$ sowie als Lösungen von $\lambda^2 - 4 = 0$ die beiden weiteren Nullstellen $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Dies sind sämtlich einfache reelle Nullstellen, so dass wir als Fundamentalsystem einfach die Lösungen nach dem obigen Exponentialansatz $y_1(x) = \mathrm{e}^{0x} = 1$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $y_3(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ nehmen können. Die allgemeine Lösung der homogenen Dgl. besteht dann aus den Linearkombinationen dieser Fundamentallösungen:

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{2x} + c_3 \mathrm{e}^{-2x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(c) Ist y eine Lösung der Differentialgleichung aus (b), so erhalten wir wegen

$$y'''(x) = 4y'(x)$$

mit $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$ und $y_3(x) = y''(x)$ das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= \qquad\quad y_3(x) \\ y_3'(x) &= 4y_2(x) \end{aligned}$$

oder

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Der Kreiszylinder $x^2+y^2 = 4$ werde oben und unten von dem zweischaligen Hyperboloid $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ begrenzt.

(6 P.)

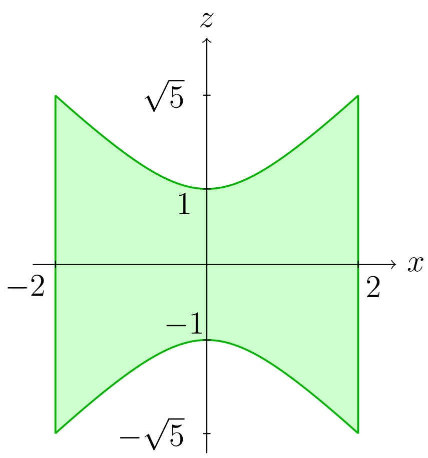
(a) Skizzieren Sie den Schnitt des entstehenden Körpers mit der x-z-Ebene.

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers.

Lösung:

(a) In der x-z-Ebene gilt $y = 0$, der Schnitt dieser Ebene mit dem Kreiszylinder hat daher die Gleichung $x^4 = 4$. Dies liefert die beiden Geraden $x = 2$ und $x = -2$.

Die Schnittkurven der Ebene mit den beiden Hyperboloidschalen haben die Gleichung $z^2 - x^2 = 1$ bzw. $z = \pm\sqrt{1 + x^2}$. Der Schnitt des Körpers mit der Ebene ist dann der von diesen Kurven bzw. Geraden eingeschlossene Bereich:



(b) Wir verwenden am besten Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z. \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass der Betrag der Funktionaldeterminante $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r$ mit unter das Integral kommt.

Der Körper K wird in z-Richtung von den beiden Hyperboloidschalen mit den Gleichungen $z = \pm\sqrt{1+x^2+y^2}$ begrenzt, als Integrationsgrenzen erhält man daher

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi &\leq 2\pi \\ 0 \leq r &\leq 2 \\ -\sqrt{1+r^2} \leq z &\leq \sqrt{1+r^2}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_K \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 z\Big|_{-\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 2\sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^5 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \qquad (\text{Subst. } t = 1+r^2,\ \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_1^5\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{125}-1\right)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).
\end{aligned}
$$

Zusatz-aufgabe:
(3 P.)

In welchen Punkten $P = (x,y) \neq (0,0)$ hat die Kurve $f(x,y) = y^2\left(1-\frac{y^2}{8}\right) - x^2 = 0$ vertikale Tangenten?

Geben Sie in jedem dieser Punkte die Gleichung der vertikalen Tangente an.

Lösung:

Eine durch eine Gleichung $f(x,y) = 0$ gegebene Kurve hat vertikale Tangenten, wenn in einem Kurvenpunkt $f_y(x,y) = 0$ und $f_x(x,y) \neq 0$ gilt.

Wir haben

$$f_y(x,y) = 2y - \frac{y^3}{2} = y\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) = 0.$$

Zunächst ergäbe sich $y = 0$, Einsetzen in die Kurvengleichung führt aber zu $x = 0$, was wir ausgeschlossen hatten, da dort auch die Ableitung $f_x = -2x$ Null wird.

Nullsetzen des anderen Faktors liefert $y^2 = 4$ also $y = \pm 2$. Für *jede* dieser beiden Lösungen ergibt Einsetzen in die Kurvengleichung $2 - x^2 = 0$, also $x = \pm\sqrt{2}$.

Insgesamt ergeben sich sich somit die vier Punkte $(\sqrt{2}, 2)$, $(\sqrt{2}, -2)$, $(-\sqrt{2}, 2)$ und $(-\sqrt{2}, -2)$.

Hier zur Illustration ein Bild der Kurve (nicht verlangt):