Studiengang:	Matrikelnummer:	Anzahl Lösungsblätter:

1	2	3	4	5	6	Z	Bonus	Punkte	Note

Prüfungsklausur zum Modul
Höhere Mathematik für Ingenieure 2

15. 2. 2021

Zugelassene Hilfsmittel: 2 A4-Blätter *eigene, handschriftliche* Ausarbeitungen aber **keine** Vorlesungs- oder Übungsmitschriften, *Formelsammlungen* aber **keine** Lehrbücher, das vorgegebene *Formelblatt von Grenzwerten, Reihen, Grundintegralen und Integrationsformeln, zugelassene wissenschaftl. Taschenrechner* (**kein** GTR, **kein** Computer-Algebra-System (CAS)).

Bearbeiten Sie bitte *jede* Aufgabe auf einem *separaten* Blatt bzw. auf separaten Blättern. Das Aufgabenblatt ist mit **abzugeben**. Vergessen Sie bitte nicht, auf dem Aufgabenblatt und *jedem* Lösungsblatt Ihre Matrikelnummer *gut leserlich* anzugeben.

Der Lösungsweg ist *stets* anzugeben, er sollte in allen Schritten durch **eigene** Rechnungen deutlich erkennbar, begründet und nachvollziehbar sein. Nur dann kann nach detaillierter Bewertung die volle Punktzahl erreicht werden. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: Gegeben sei die Matrix
(10 P.)

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ -8 & 0 & -11 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } b \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimmen Sie alle b, für die $\lambda = -7$ ein Eigenwert von A ist.

(b) Bestimmen Sie für den Fall $b = 1$ sämtliche Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenvektoren. Geben Sie zu allen Eigenwerten die algebraische und geometrische Vielfachheit an.

(c) Ist A für den Fall $b = 1$ diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix V und eine Diagonalmatrix D an, für die $A = VDV^{-1}$ gilt.

Lösung:

(a) Eine Zahl λ ist genau dann Eigenwert von A, wenn

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 4 \\ -4 & -3-\lambda & -4 \\ -8 & 0 & -11-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-3-\lambda)\big((b-\lambda)(-11-\lambda) + 32\big) \\ &= (-3-\lambda)\big(\lambda^2 + (11-b)\lambda + 32 - 11b\big) = 0 \end{aligned}$$

ist (Entwicklung der Determinante nach 2. Spalte). Soll dies für $\lambda = -7$ gelten, muss also

$$4(49 - 7(11-b) + 32 - 11b) = 4(-4b+4) = 0$$

sein, d. h. $b = 1$.

(b) Die charakteristische Gleichung für den Fall $b = 1$ ist

$$(-3-\lambda)\big(\lambda^2 + 10\lambda + 21\big) = 0.$$

Diese ist erfüllt, wenn einer der Faktoren 0 ist, wenn also $\lambda = \lambda_1 = -3$ oder $\lambda^2 + 10\lambda + 21 = 0$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man hier $\lambda_{2/3} = -5 \pm 2$, also $\lambda_2 = -3$ und $\lambda_3 = -7$. Der Eigenwert $\lambda = -3$ besitzt damit die algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert $\lambda = -7$ die algebraische Vielfachheit 1.

Zur Bestimmung der zum Eigenwert $\lambda = -3$ gehörigen Eigenvektoren müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A + 3E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{array}{rrr|r}
\boxed{4} & 0 & 4 & 0 \\
-4 & 0 & -4 & 0 \\
-8 & 0 & -8 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Wir setzen $v_2 = s$, $v_3 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$, und erhalten die allgemeine Lösung

$$\vec{v} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2, \quad , s, t \in \mathbb{R}.$$

Die beiden offenbar linear unabhängigen Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ spannen also den Unterraum zum EW $\lambda = -3$ auf, bilden also eine Basis desselben. Der Eigenwert $\lambda = -3$ besitzt also geometrische Vielfachheit 2.

Zur Bestimmung der zum Eigenwert $\lambda = -7$ gehörigen Eigenvektoren müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem $(A + 7E)\vec{v} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{array}{rrr|r}
8 & 0 & 4 & \\
-4 & \boxed{4} & -4 & 0 \\
-8 & 0 & -4 & 0 \\
\hline
8 & 0 & \boxed{4} & \\
-8 & 0 & -4 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Wir setzen $v_1 = s$, $s \in \mathbb{R}$, und erhalten die allgemeine Lösung

$$\vec{v} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = s\vec{v}_3, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{v}_3$ bildet also eine Basis des Eigenunterraums zum EW $\lambda = -7$, dieser besitzt also die geometrische Vielfachheit 1 (was schon wegen der algebraischen Vielfachheit 1 zwangsläufig so sein muss).

(c) Da für alle EW die geometrische mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt (oder äquivalent, da es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus den drei linear unabhängigen EV $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ gibt), ist A diagonalisierbar.

Bildet man die Matrix

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

aus den drei linear unabhängigen EV und die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

aus den dazugehörigen EW in entsprechender Reihenfolge, so gilt $V^{-1}AV = D$ oder äquivalent $A = VDV^{-1}$.

Aufgabe 2: Gegeben ist die Funktion
(9 P.)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (y^2 + 2x^2)\mathrm{e}^{x-y}.$$

(a) Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(2,2)$ in Koordinatenform?

(b) Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrema von f. Geben Sie auch die zugehörigen Extremwerte an.

Lösung:

(a) Wir bestimmen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4x\mathrm{e}^{x-y} + (y^2 + 2x^2)\mathrm{e}^{x-y} = (4x + 2x^2 + y^2)\mathrm{e}^{x-y} \\ f_y(x,y) &= 2y\mathrm{e}^{x-y} - (y^2 + 2x^2)\mathrm{e}^{x-y} = (2y - y^2 - 2x^2)\mathrm{e}^{x-y}. \end{aligned}$$

In dem gegebenen Punkt (2,2) haben wir

$$f(2,2) = 12, \qquad f_x(2,2) = 20, \qquad f_y(2,2) = -8.$$

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(2,2)$ lautet demnach

$$\begin{aligned} z &= f(2,2) + f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(x-2) \\ &= 12 + 20(x-2) - 8(y-2) = 20x - 8y - 12 \end{aligned}$$

bzw.

$$20x - 8y - z = 12.$$

(b) Zunächst suchen wir stationäre Stellen, d. h. solche, in denen die *notwendigen Extremalbedingungen* $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ erfüllt sind. Da der in beiden Ableitungen enthaltene Faktor e^{x-y} stets von Null verschieden ist, genügt es, die folgenden Gleichungen zu untersuchen (wobei die Variablen hier schon „zweckmäßig“ umgeordnet wurden):

$$4x + 2x^2 + y^2 = 0 \qquad (1)$$
$$2y - 2x^2 - y^2 = 0. \qquad (2)$$

Addition beider Gleichungen ergibt die Beziehung $4x + 2y = 0$ und damit

$$y = -2x. \qquad (3)$$

Einsetzen von (**??**) z. B. in (**??**) liefert

$$4x + 6x^2 = 2x(2 + 3x) = 0$$

mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{2}{3}$. Die Beziehung (**??**) liefert die jeweils dazugehörigen y-Koordinaten $y_1 = 0$ und $y_2 = \frac{4}{3}$, so dass sich die beiden stationären Punkte

$$P_1 = (0,0)\,, \qquad P_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

ergeben.

Wir prüfen in den stationären Punkten die *hinreichenden Extremalbedingungen* mittels der Hesse-Matrix. Dafür benötigen wir die partiellen Ableitungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (4+4x)\mathrm{e}^{x-y} + (4x+2x^2+y^2)\mathrm{e}^{x-y} = (2x^2+y^2+8x+4)\mathrm{e}^{x-y} \\ f_{xy}(x,y) &= 2y\mathrm{e}^{x-y} - (4x+2x^2+y^2)\mathrm{e}^{x-y} \qquad\quad = (2y-y^2-2x^2-4x)\mathrm{e}^{x-y} \\ &= f_{yx}(x,y) \\ f_{yy}(x,y) &= (2-2y)\mathrm{e}^{x-y} - (2y-y^2-2x^2)\mathrm{e}^{x-y} = (y^2+2x^2-4y+2)\mathrm{e}^{x-y}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun jeweils die Hesse-Matrix $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$.

Im stationären Punkt $P_1 = (0,0)$ haben wir $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Wir untersuchen diese Matrix auf Definitheit. Für die führenden Hauptminoren gilt $D_1 = f_{xx}(0,0) = 4 > 0$ und $D_2 = \det H_f(0,0) = 8 > 0$. Daher ist die Hesse-Matrix positiv definit, und in P_1 liegt ein Minimum mit dem Funktionswert $f(0,0) = 0$ vor.

Im stationären Punkt $P_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ gilt $H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3\mathrm{e}^2}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$. Dabei gilt $\det H_f\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9\mathrm{e}^4}(-8-64) < 0$. Bei einer 2×2-Matrix folgt daraus, dass diese indefinit ist, folglich liegt in P_2 kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor.

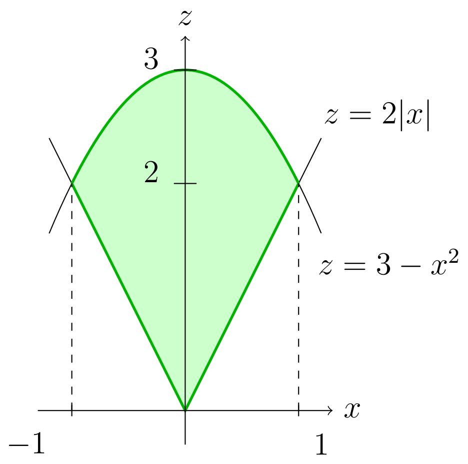
Aufgabe 3: **(5 P.)** Gegeben sei ein inhomogener Körper, der durch das Paraboloid $z = 3 - x^2 - y^2$ und den Kegelmantel $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ begrenzt wird. Die Massendichte sei gegeben durch

$$\varrho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Skizzieren Sie die Schnittfläche des Körpers mit der x-z-Ebene (Schraffur), und berechnen Sie die Masse des Körpers.

Lösung:

Der Körper wird vom Paraboloiden $z(x,y) = 3 - x^2 - y^2$ und dem Kegel $z(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ begrenzt. Für die Skizze in der x-z-Ebene (also mit $y = 0$) werden deshalb die Funktionen $z = 3 - x^2$ und $z = 2\sqrt{x^2} = 2|x|$ eingetragen. (Die x-Koordinaten $x = \pm 1$ der Schnittpunkte ergeben sich, wenn man zur Auflösung der Betragsstriche eine Fallunterscheidung macht und die Gleichungen $3 - x^2 = 2x$ für $x \geq 0$ und $3 - x^2 = -2x$ für $x < 0$ löst.)



Die Masse berechnet sich nach der Formel

$$m = \iiint_V \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

dabei ist $\varrho(x,y,z)$ die Dichte. Da der Körper rotationssymmetrisch ist (der skizzierte Körper rotiert um die z-Achse), ist es sinnvoll Zylinderkoordinaten zu verwenden:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Um das Integral aufzustellen benötigen wir die Integrationsgrenzen und die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = r$. Die Grenzen für z kann man an der Skizze erkennen, es wird vom Kegelmantel zum Paraboloiden integriert. Die Grenzen für r und φ bestimmen sich nun wie folgt. Der Integrationsbereich in der x-y-Ebene ergibt sich aus der Projektion der Schnittmenge von Kegelmantel und Paraboloid:

$$z = 3 - (x^2+y^2) = 2\sqrt{x^2+y^2} \iff 3 - r^2 = 2r \quad \text{in Zylinderkoordinaten.}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung $r^2 + 2r - 3 = 0$ sind $r_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$. Die einzig mögliche Lösung ist $r = 1$ ($r = -1$ ist eine Scheinlösung, da $r \geq 0$ ist). Der Integrationsbereich in der x-y-Ebene ist also die Einheitskreischeibe:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1\},$$

der entsprechende Bereich für die Koordinaten r und φ ist

$$\{(r,\varphi) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Damit ergibt sich mit der Dichte $\varrho = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned}
m &= \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=2r}^{3-r^2} \frac{1}{r}\,r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} z\Big|_{z=2r}^{3-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(3-r^2-2r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(3r - \frac{r^3}{3} - r^2\right)\Big|_0^1\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(3 - \frac{1}{3} - 1\right)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{5}{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi\cdot\frac{5}{3} = \frac{10}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Gegeben sind die Funktion
(7 P.)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y + x^2,$$

sowie die Nebenbedingung

$$y = (x-1)^2.$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der *Lagrange-Methode* alle Punkte, die für f unter der gegebenen Nebenbedingung als lokale Extremstellen in Frage kommen.

(b) Skizzieren Sie ein Höhenlinienbild (Karte) von f, das auch die Nebenbedingung enthält. Entnehmen Sie dieser Skizze, ob tatsächlich Extrema existieren, und ob es sich in diesem Falle um Minima oder Maxima handelt.

Lösung:

(a) Wir schreiben die Nebenbedingung in der Form $g(x,y) := y - (x-1)^2 = 0$ und bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = y + x^2 + \lambda\left(y - (x-1)^2\right).$$

Notwendig für ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung sind die Bedingungen

$$L_x(x,y,\lambda) = L_y(x,y,\lambda) = L_\lambda(x,y,\lambda) = 0,$$

wir haben also das (nichtlineare) Gleichungssystem

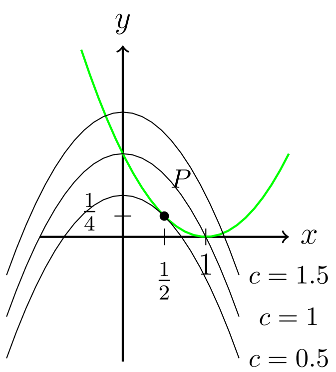
$$2x - 2\lambda(x-1) = (2-2\lambda)x + 2\lambda = 0 \tag{1}$$
$$1 + \lambda = 0 \tag{2}$$
$$y - (x-1)^2 = 0. \tag{3}$$

Aus Gleichung (**??**) folgt sofort $\lambda = -1$. Einsetzen in (**??**) ergibt $4x - 2 = 0$, somit $x = \frac{1}{2}$. Aus Gleichung (**??**) folgt schließlich $y = \frac{1}{4}$

Wir erhalten also die einzige extremwertverdächtige Stelle $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

(b) Die Nebenbedingung beschreibt eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $(1,0)$.

Die Niveaulinien von f erfüllen Gleichungen der Form $f(x,y) = y + x^2 = c$ bzw. $y = c - x^2$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Dies beschreibt eine Schar von zueinander parallel verschobenen nach unten geöffneten Parabeln. Der auf der Niveaulinie angenommene Funktionswert c ist dabei um so größer, je weiter oben die Parabel liegt. In der Skizze sind die Niveaulinien zu den Werten $c = f(P) = \frac{1}{2}$, $c = 1$ und $c = \frac{3}{2}$ eingezeichnet.



Offenbar verläuft durch P die am weitesten unten gelegene Niveaulinie von f, die die Parabel $g(x, y) = 0$ schneidet oder berührt. Durch alle in einer Umgebung von P gelegenen Punkte der Parabel $g(x, y) = 0$ verlaufen Niveaulinien mit einem größeren Wert als $f(P) = \frac{1}{2}$, da diese Parabeln weiter oben liegen würden. In P liegt daher ein lokales (sogar das globale) Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ vor.

Aufgabe 5: **(7 P.)**

(a) Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurve:

$$\vec{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2 - 4t^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Besitzt das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \mathrm{e}^x + 4xy \\ 2y\mathrm{e}^x + 2x^2 \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion/Potentialfunktion? Wenn ja, bestimmen Sie eine.

(c) Man berechne die Arbeit $W = \int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{F}(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}$, wenn $\vec{\gamma}$ die Kurve aus (a) und $\vec{F}$ das Vektorfeld (Kraftfeld) aus (b) ist.

Lösung:

(a) Wir haben $\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -8t \end{pmatrix}$, somit ist das skalare Bogenelement gleich

$$\mathrm{d}s = |\vec{\gamma}'(t)|\, \mathrm{d}t = \sqrt{(6t)^2 + (-8t)^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{100t^2}\, \mathrm{d}t = 10t\, \mathrm{d}t.$$

Die Länge der Kurve ergibt sich dann als

$$L = \int_{\vec{\gamma}} \mathrm{d}s = \int_0^1 10t\, \mathrm{d}t = 5t^2\Big|_0^1 = 5.$$

(b) Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist in ganz $\mathbb{R}^2$ (einfach zusammenhängendes Gebiet) definiert. Daher ist hier die Integrabilitätsbedingung notwendig *und hinreichend* für die Existenz einer Stammfunktion. Bezeichnen wir die Komponenten von $\vec{F}(x, y)$ mit $P(x, y)$ und $Q(x, y)$, dann lautet die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$. Diese Bedingung ist offenbar erfüllt, denn

$$P_y(x, y) = 2y\mathrm{e}^x + 4x = Q_x(x, y).$$

Wir ermitteln nun eine Stammfunktion, d. h. eine skalare Funktion f zweier Variabler, für die $f_x = P$ und $f_y = Q$ gilt, mit der *Ansatzmethode*: Zunächst erhalten wir durch Integration der ersten Gleichung bezüglich x die Beziehung

$$f(x, y) = \int P(x, y)\, \mathrm{d}x = 2\int (y^2\mathrm{e}^x + 4xy)\, \mathrm{d}x = y^2\mathrm{e}^x + 2x^2y + c(y).$$

Dabei ist $c(y)$ der Ansatz für die noch von y abhängige Integrationskonstante. Zu deren Bestimmung setzen wir den für $f(x, y)$ erhaltenen Ausdruck in $f_y = Q$ ein und bekommen

$$\begin{aligned} f_y(x, y) = 2y\mathrm{e}^x + 2x^2 + c'(y) &\overset{!}{=} 2y\mathrm{e}^x + 2x^2 \\ c'(y) &= 0, \end{aligned}$$

woraus nach Integration bezüglich y die Gleichung

$$c(y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

folgt. Alle Stammfunktionen f sind somit von der Form

$$f(x, y) = y^2 \mathrm{e}^x + 2x^2 y + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

(c) Nachdem die Existenz einer Stammfunktion und damit – dazu äquivalent – die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen 2. Art des Vektorfeldes $\vec{F}$ gezeigt und eine Stammfunktion f berechnet ist, kann man das Kurvenintegral am schnellsten durch Einsetzen von Anfangspunkt $\vec{\gamma}(0) = (0, 2)$ und Endpunkt $\vec{\gamma}(1) = (3, -2)$ der Kurve in eine beliebige Stammfunktion (z. B. aus (**??**) mit $c = 0$) bestimmen:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{x} = f(3, -2) - f(0, 2) = 4\mathrm{e}^3 - 40.$$

Aufgabe 6: **(7 P.)**

(a) Bestimmen Sie die Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = y\mathrm{e}^x - 2yx, \quad y(0) = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' - 10y = 2x^2 - 5.$$

Lösung:

(a) Ausklammern von y in der Dgl. liefert

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\mathrm{e}^x - 2x)y.$$

Die Differentialgleichung ist daher eine trennbare Integralgleichung mit der partikulären Lösung $y = 0$. Damit können wir trennen und dann beide Seiten integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \mathrm{e}^x - 2x \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y(x)| &= \int (\mathrm{e}^x - 2x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x^2 + C \qquad | \text{ Exp.} \\ |y(x)| &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - x^2} \cdot \mathrm{e}^K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Auflösen des Betrags und Einbeziehung der partikulären Lösung $y = 0$ ergibt

$$y(x) = C\, \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems bestimmt sich aus der Anfangsbedingung:

$$y(0) = C\mathrm{e}^{\mathrm{e}^0 - 0^2} = C \cdot \mathrm{e} = \sqrt{\mathrm{e}} \iff C = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - x^2}.$$

(b) Dies ist eine inhomogene, lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Als erstes bestimmen wir die Lösung der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung mit Hilfe des λ-Ansatzes. Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen sind:

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \\ &\lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{40}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Folglich ist $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist damit

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-5x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Da es eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist, kann eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite bestimmt werden. Da die rechte Seite ein Polynom vom Grad 2 ist und kein Resonanzfall vorliegt, lautet der Ansatz:

$$y_s(x) = Ax^2 + Bx + C$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten A, B, C. Dazu setzen wir $y_s(x)$ und seine Ableitungen in die inhomogene Differntialgleichung ein. Die Ableitungen sind

$$y_s'(x) = 2Ax + B, \quad y''(x) = 2A.$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} y_s'' + 3y_s' - 10y_s &= 2A + 3(2Ax + B) - 10(Ax^2 + Bx + C) \\ &= -10Ax^2 + (6A - 10B)x + 2A + 3B - 10C = 2x^2 - 5. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} -10A = 2 &\iff A = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}, \\ 6A - 10B = 0 &\iff 6A = -\frac{6}{5} = 10B \iff B = -\frac{6}{50} = -\frac{3}{25}, \\ 2A + 3B - 10C = -5 &\iff 2\left(\frac{-1}{5}\right) + 3\left(-\frac{3}{25}\right) - 10C = -5 \\ &\iff \frac{-2}{5} - \frac{9}{25} + 5 = \frac{-10 - 9 + 125}{25} = \frac{106}{25} = 10C \\ &\iff C = \frac{106}{250} = \frac{53}{125}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist deshalb

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-5x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} - \frac{x^2}{5} - \frac{3x}{25} + \frac{53}{125}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zusatzaufgabe: **(3 P.)**

Gegeben sei die Kurve $\sin x \sin y + x \cos y + y \cos x = \frac{\pi}{2}$.

(a) Ermitteln Sie alle Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen.

(b) Ermitteln Sie für jeden der in (a) ermittelten Schnittpunkte eine Gleichung der Tangente an die Kurve in dem Punkt.

Lösung:

Wir setzen $F(x,y) := \sin x \sin y + x\cos y + y\cos x - \frac{\pi}{2}$, so dass die Kurve durch

$$F(x,y) = 0 \tag{5}$$

beschrieben wird.

(a) Die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse sind diejenigen Punkte (x,y), die (**??**) erfüllen und für die $y=0$ gilt. Einsetzen von $y=0$ in (**??**) ergibt

$$0 + x + 0 - \frac{\pi}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Einsetzen von $x=0$ in (**??**) für den Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt analog

$$0 + 0 + y - \frac{\pi}{2} = 0 \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2}.$$

Die Schnittpunkte der Kurve mit den Achsen sind also $S_x = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ und $S_y = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Die partiellen Ableitungen der Funktion F sind

$$F_x(x,y) = \cos x \sin y + \cos y - y \sin x, \quad F_y(x,y) = \sin x \cos y - x \sin y + \cos x.$$

Die durch (**??**) implizit definierte Funktion einer Veränderlichen $y = g(x)$ hat in einem Punkt (x,y) auf der Kurve den Anstieg

$$y' = g'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Im Punkt S_x ergibt sich somit der Anstieg $m = g'(\pi/2) = -1$. Dieser ist gleichzeitig der Anstieg der Tangente an die Kurve im Punkt S_x. Diese wird also durch eine Geradengleichung der Form

$$y = -x + n$$

beschrieben. Setzen wir die Koordinaten des Kurvenpunktes S_x in diese Gleichung ein, erhalten wir $n = x = \frac{\pi}{2}$. Die Tangentengleichung lautet also $y = -x + \frac{\pi}{2}$.

Im Punkt S_y ergibt sich analog ebenfalls der Anstieg $m = g'(0) = -1$. Die Tangente an die Kurve im Punkt S_y hat also ebenfalls eine Geradengleichung der Form

$$y = -x + n.$$

Setzen wir die Koordinaten von S_y in diese Gleichung ein, erhalten wir wiederum $n = y = \frac{\pi}{2}$. Die Tangente ist also in S_x und S_y dieselbe Gerade.